

Álgebra CBC

Exactas e Ingeniería

SLM! ~ política por mano propia



Palabras previas

Este apunte surge para enfrentar una forma encubierta de arancel. Porque aunque la Universidad es gratuita hay muchas maneras indirectas de cobrarnos por estudiar, los que hacemos esta edición denunciarnos el abuso en el precio con que se venden otras ediciones, privatizando el trabajo docente, que en definitiva es propio de la Universidad y por tanto de todos.

Con el disfraz de la legitimidad, unos justifican el monopolio de la comercialización; con el pretexto de la organización, otros engañan con rebajas a medias; pero en cualquier caso, se nos separa a los estudiantes del CBC y a los de las carreras para sacar ventajas de una falsa división.

Por eso, no hacemos esta guía de copados que somos ni porque busquemos apuntes baratos y ya: este esfuerzo es la confirmación práctica de nuestra afirmación sobre el precio excesivo de otras ediciones; es el ejemplo de que un grupo de estudiantes hartos de que nos estafen somos capaces de encarar proyectos grandes con seriedad; es una invitación para que te animes a pelear por lo que creas justo, y es nuestra forma de luchar por la desarancelización completa de la UBA en una Argentina más solidaria.

En www.slm.org.ar/cbc podés bajarte **GRATIS** ésta y todas las guías que tenemos. La página tiene mucha más información sobre nosotros: te contamos quiénes somos, justificamos lo que acá puede parecerse descolgado, publicamos nuestras novedades, te ofrecemos varias formas de contactarnos y algunos etcéteras más.

Desde ya que también nos importa conocer tu opinión. Escribinos tus comentarios, correcciones o sugerencias sobre esta guía a cbc@slm.org.ar o, sobre cualquier otra cosa que para vos sea importante o quieras preguntarnos, a hola@slm.org.ar.

Conocenos por lo que hacemos, no por nuestros carteles.

Por último, esta guía no hubiera sido posible de no ser por el esfuerzo de SLM!, Nicolás y Patricia. GRACIAS.

Índice general

0. Repaso	4
0.1. Ejercicios	4
1. Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	9
1.1. Definiciones y Propiedades	9
1.2. Ejercicios	17
1.3. Ejercicios Surtidos	23
2. Sistemas lineales y matrices	26
2.1. Definiciones y propiedades	26
2.2. Ejercicios	30
2.3. Ejercicios Surtidos	36
3. Determinantes	37
3.1. Definiciones y propiedades	37
3.2. Ejercicios	39
3.3. Ejercicios surtidos	43
4. Espacios vectoriales - Subespacios	45
4.1. Definiciones y propiedades	45
4.2. Ejercicios	49
4.3. Ejercicios surtidos	57
5. Transformaciones lineales	60
5.1. Definiciones y propiedades	60
5.2. Ejercicios	63
5.3. Ejercicios surtidos	70
6. Números Complejos y Polinomios	74
6.1. Definiciones y propiedades	74
6.2. Ejercicios	78
6.3. Ejercicios Surtidos	83
7. Autovalores y Autovectores	85
7.1. Definiciones y propiedades	85
7.2. Ejercicios	86
7.3. Ejercicios surtidos	88
8. Programa	90



Práctica 0

Repaso

Nota a los alumnos. Los temas que se incluyen en esta práctica se suponen conocidos por ustedes. Debido a que el conocimiento de los mismos será necesario a lo largo de todo el curso, es fundamental que a modo de repaso, resuelvan estos ejercicios consultando bibliografía y/o al docente.

0.1. Ejercicios

Ejercicio 0.1 Calcular:

- (a) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$
- (b) $\frac{12}{24} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - 2 + \frac{1}{5}\right)$
- (c) $\frac{\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)}{\left(5 + \frac{1}{7}\right)}$
- (d) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(-1 - \frac{1}{5}\right) + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\right) - \left(3 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{14}\right)\right)$

Ejercicio 0.2 Verificar las igualdades:

- (a) $\frac{\left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{6}\right)} = 24,3$
- (b) $\frac{\left(\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}\right)}{\frac{2}{9}} = 2$

Ejercicio 0.3 Calcular:

- (a) $\left(\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1}$
- (c) $\left(\frac{1}{27} \div \frac{1}{3}\right)^{-2}$
- (b) $\left(\frac{1}{27} \div \frac{1}{3}\right)^{1/2}$
- (d) $\left(\frac{1}{27} \div \frac{1}{3}\right)^{-1/2}$

Ejercicio 0.4 Ordenar de menor a mayor:

- (a) $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}$
 (b) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{1000}$
 (c) $\frac{9}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{7}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, 3, -\frac{1}{-17}, \pi, -\pi^2, (-\pi)^2, (100)^{1/2}, (100)^{-1/2}$

Ejercicio 0.5 Si tuviera que elegir la parte más grande de una fortuna F , ¿cuál de las dos fracciones elegiría,

$$\frac{n}{n+1} \text{ de } F \quad \text{ó} \quad \frac{n^2-1}{n^2} \text{ de } F ?$$

Ejercicio 0.6 Analizar la validez de las siguientes proposiciones; dar un contraejemplo para las que no son válidas.

- (a) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad a \geq 0; b \geq 0$ (i) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad a \neq 0$
 (b) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ (j) $a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad a \neq 0$
 (c) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (k) $a^{-2} = -a^2 \quad a \neq 0$
 (d) $\sqrt{a^2} = a$ (l) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad a \neq 0$
 (e) $(2^2)^n = 2^{2n}$ (m) $a^0 = 1 \quad a \neq 0$
 (f) $(2^2)^n = 2^{(2^n)}$ (n) $\sqrt{36 \cdot a} = 6 \cdot \sqrt{a} \quad a \geq 0$
 (g) $\sqrt{a^2} \geq 0$ (ñ) $\sqrt{(5+5)a} = 5 \cdot \sqrt{a} \quad a \geq 0$
 (h) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (o) $\frac{a}{a} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Rtas: V, F, F, F, V, F, V, F, V, F, F, V, V, V, F, F.

Ejercicio 0.7 Una solución se dice más concentrada que otra si tiene mayor proporción entre la sustancia activa y el diluyente que la otra.

El boticario tiene un botellón de 1 litro y medio donde 1/5 es sustancia activa y un bidón de 2 litros donde 2/3 es sustancia activa. ¿En cuál de los dos envases la solución es más concentrada?

Ejercicio 0.8 El precio de un equipo de audio con el 15% de descuento es de \$3.417. ¿Cuál era el precio original?

Ejercicio 0.9 Hallar dos números cuyo producto sea 4 y que sumen 6.

Una expresión de la forma $ax^2 + \beta x + \gamma$ siempre se puede escribir como un factor por un binomio al cuadrado más una constante $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x+b)^2 + d$.

Completar cuadrados es encontrar, para cada expresión $ax^2 + \beta x + \gamma$, los coeficientes a , b y d para que la igualdad se verifique para todo valor de x .

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 1 &= 3 \left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x^2 + \frac{2}{6}x + \left(\frac{1}{6} \right)^2 \right) - \left(\frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{13}{36} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 0.10 Completar cuadrados en cada una de las expresiones siguientes:

- (a) $P(x) = 6x^2 - 6x - 12$ (d) $P(x) = 15x^2 - 8x + 1$
 (b) $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$ (e) $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$
 (c) $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$ (f) $P(x) = x^2 + 2\pi x - \sqrt{2}$

Ejercicio 0.11 Resolver, para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, las ecuaciones de segundo grado $P(x) = 0$.

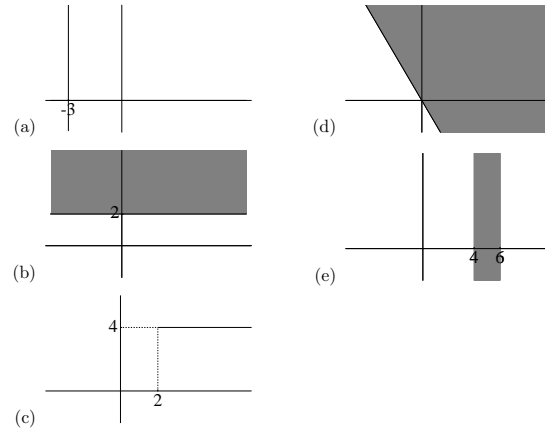
Ejercicio 0.12 Representar en el plano:

$$\begin{array}{llll} A_1 = (2, 2) & A_4 = (2, 0) & A_7 = (\sqrt{2}, 1) & A_{10} = (\sqrt{2}, -1) \\ A_2 = (3, -1) & A_5 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & A_8 = (-\sqrt{2}, 1) & A_{11} = (0, -1) \\ A_3 = (-1, 4) & A_6 = \left(-1, -\frac{1}{4}\right) & A_9 = (-\sqrt{2}, -1) & A_{12} = (3, 1 + \sqrt{2}) \end{array}$$

Ejercicio 0.13 Representar en el plano los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(x, y) / x = 1\} & A_6 = \{(x, y) / x = y\} \\ A_2 = \{(x, y) / x \geq 2\} & A_7 = \{(x, y) / x = 2y\} \\ A_3 = \{(x, y) / y < 2\} & A_8 = \{(x, y) / x = 2y + 1\} \\ A_4 = \{(x, y) / -3 < y < 2\} & A_9 = \{(x, y) / x \cdot y < 0\} \\ A_5 = \{(x, y) / x = 1, y < 2\} & A_{10} = \{(x, y) / x \cdot y = 0\} \end{array}$$

Ejercicio 0.14 Definir algebraicamente los siguientes conjuntos del plano:



Ejercicio 0.15 Sean los siguientes subconjuntos del plano:

$$A = \{(x, y) / \frac{1}{2} \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

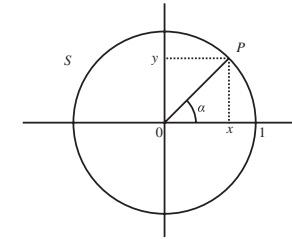
$$C = \{(x, y) / x = -y\}$$

$$D = \{(x, y) / x \geq \frac{1}{3}; y \leq -\frac{1}{2}\}$$

$$E = \{(x, y) / 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Hallar gráficamente $A \cup B$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cup D$; $A \cap D$; $B \cap D$; $E \cup B$; $E \cap B$; $A \cap E$. Verificar que $E \subset B$.

Ejercicio 0.16 Sea S la circunferencia de radio 1 y centro en el origen. Sea α un ángulo, $0 \leq \alpha < 360^\circ$, con vértice en el origen, uno de cuyos lados coincide con el semieje positivo de las x . Sea P el punto donde el otro lado de α interseca a S . Si $P = (x, y)$, se define $\cos \alpha = x$; $\sin \alpha = y$.



- ¿Cuánto valen $\sin 90^\circ$; $\cos 180^\circ$; $\cos 270^\circ$; $\sin 180^\circ$?
- Decidir si son positivos o negativos $\sin 37^\circ$; $\cos 224^\circ$; $\sin 185^\circ$.
- Para todo α se tiene $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ¿Por qué? Deducir que $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ y que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
- ¿Cuánto valen $\sin 90^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\cos 270^\circ$, $\sin 180^\circ$?
- Decidir si son positivos o negativos $\sin 37^\circ$, $\cos 224^\circ$, $\sin 185^\circ$.
- Para todo α se tiene $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ¿Por qué? Deducir que $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ y que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Práctica 1

Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

1.1. Definiciones y Propiedades

Una flecha, que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades), es un *vector*. Para dar un vector necesitamos un *origen* (A) y un *extremo* (B) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.



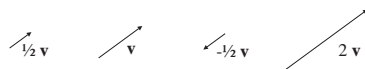
Vectores equivalentes son los que tiene igual dirección, longitud y sentido. Los siguientes vectores son todos equivalentes a \mathbf{v}



Los vectores se pueden sumar. La suma $(\mathbf{v} + \mathbf{w})$, de \mathbf{v} y \mathbf{w} es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados \mathbf{v} y \mathbf{w} .



También se puede multiplicar un vector por un número (escalar).

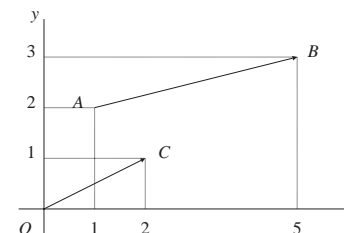


El resultado es un vector de igual dirección que el dado, el número afecta la longitud y el sentido del vector.

En el plano \mathbb{R}^2 los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas); para dar un vector bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo.

$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ está dado por $A = (1, 2)$ y $B = (5, 3)$

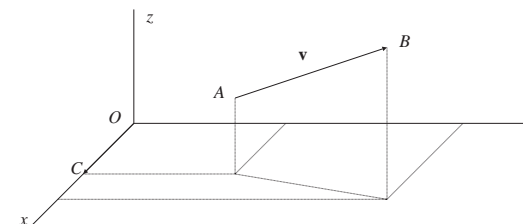
$\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$ está dado por $O = (0, 0)$ y $B = (2, 1)$



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones \mathbb{R}^3 ; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales.

$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ está dado por $A = (2, 4, 3)$ y $B = (4, 10, 6)$

$\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$ está dado por $O = (0, 0, 0)$ y $B = (2, 0, 0)$



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a cero ($O = (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 , $O = (0, 0, 0)$ en \mathbb{R}^3) identificado entonces el punto A con la flecha \overrightarrow{OA} .

Dados A y B en \mathbb{R}^2 , $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, definimos la *suma*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

y el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$

$$cA = (ca_1, ca_2).$$

Análogamente, en \mathbb{R}^3 , si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, la *suma*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

y el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$

$$cA = (ca_1, ca_2, ca_3).$$

Propiedades:

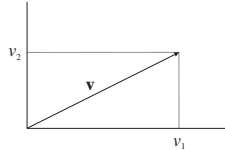
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + B = B + A$
- Si $c \in \mathbb{R}$, $c(A + B) = cA + cB$
- Si $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$ y $(c_1 \cdot c_2)A = c_1(c_2A)$
- $O + A = A$
- $1A = A$
- $A + (-1)A = O$
- $OA = O$

Notación: $-A = (-1)A$ **Propiedades:** En este contexto,

- \overrightarrow{AB} es *equivalente* a \overrightarrow{CD} si y sólo si $D - C = B - A$; en particular, \overrightarrow{AB} es equivalente a \overrightarrow{OP} si y sólo si $P = B - A$.
- \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son *paralelos* o tienen igual dirección si existe k en \mathbb{R} , $k \neq 0$ tal que $B - A = k(D - C)$. Si $k > 0$, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} tienen igual sentido; si $k < 0$, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} tienen sentidos opuestos.

Longitud de un vector

En \mathbb{R}^2 , si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, la *norma* o *longitud* de \mathbf{v} , que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

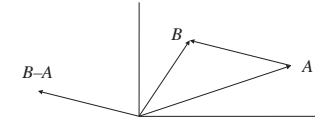


Análogamente, en \mathbb{R}^3 , si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la *norma* o *longitud* de \mathbf{v} es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Propiedades:

- Si $A = O$, entonces $\|A\| = 0$; $A \neq O$, entonces $\|A\| > 0$.
- $\|A\| = \|-A\|$.
- Si $c \in \mathbb{R}$ $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$.
- Desigualdad triangular: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Si A y B son dos puntos de \mathbb{R}^2 , la *distancia* entre A y B es la longitud del vector $B - A$ (equivalente a \overrightarrow{AB}) y se nota $d(A, B) = \|B - A\|$

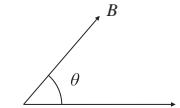


Análogamente, en \mathbb{R}^3 , la *distancia* entre dos puntos A y B es $d(A, B) = \|B - A\|$.

Un vector A se dice *unitario* si $\|A\| = 1$.

Ángulo entre dos vectores

Llamaremos *ángulo* entre A y B al ángulo $\theta(A, B)$ que determinan los dos vectores y verifica $0 \leq \theta(A, B) \leq \pi$.

**Producto interno o escalar**

Dados dos vectores A y B llamaremos *producto interno* (o *escalar*) de A y B al número real $A \cdot B = \|A\|\|B\|\cos \theta$ con $\theta = \theta(A, B)$.

Propiedad:

$$A \cdot B = \frac{1}{2} (\|B\|^2 + \|A\|^2 - \|B - A\|^2).$$

En particular si A y B son vectores en el plano, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2$.

En \mathbb{R}^3 , si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Observaciones:

- El producto escalar de dos vectores es un número real.
- $\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$

Propiedades:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$
- Si $k \in \mathbb{R}$, $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB)$
- Si $A = O$, $A \cdot A = 0$. Si $A \neq O$ $A \cdot A > 0$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|A \cdot B| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que si A y B son ambos distintos de cero, vale

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} \leq 1$$

Propiedad: el *ángulo entre dos vectores* A y B ($\theta = \theta(A, B)$) es el único ángulo θ entre 0 y π que verifica $\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|}$.

Diremos que dos vectores A y B son *ortogonales* o *perpendiculares* si $A \cdot B = 0$.

Producto vectorial

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores de \mathbb{R}^3 , el *producto vectorial* de A y B es:

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Observación: El producto vectorial de dos vectores de \mathbb{R}^3 es un vector de \mathbb{R}^3 .

Propiedades:

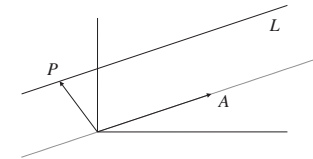
- $A \times B = -B \times A$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- Si $k \in \mathbb{R}$, $(kA) \times B = k(A \times B) = A \times (kB)$
- $A \times A = O$
- $A \times B$ es perpendicular a A y a B
- $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$
- $\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot |\sin \theta|$ donde θ es el ángulo formado por A y B .

Observación: De la última propiedad se deduce que $\|A \times B\|$ es el área del paralelogramo de vértices O , A , B , $A + B$.

Rectas

Dados en el plano \mathbb{R}^2 un vector A y un punto P la *ecuación paramétrica* de la recta L que pasa por P en la dirección de A es:

$$X = tA + P \quad (t \in \mathbb{R}).$$



Si $A = (a_1, a_2)$ y $P = (p_1, p_2)$, se escribe: $(x, y) = t(a_1, a_2) + (p_1, p_2)$ ó

$$\begin{cases} x = ta_1 + p_1 \\ y = ta_2 + p_2 \end{cases}.$$

Si $c = a_2p_1 - a_1p_2$, la recta L es el conjunto de soluciones de la ecuación $a_2x - a_1y = c$.

Para describir una recta en \mathbb{R}^2 podemos utilizar la ecuación paramétrica $X = tA + P$ (donde $X = (x, y)$) o utilizar la ecuación implícita $ax + by = c$.

Dados en \mathbb{R}^3 un vector A y un punto P la *ecuación paramétrica* de la recta L que pasa por P en la dirección de A es:

$$X = tA + P \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $P = (p_1, p_2, p_3)$ tenemos $(x, y, z) = t(a_1, a_2, a_3) + (p_1, p_2, p_3)$ ó

$$\begin{cases} x = ta_1 + p_1 \\ y = ta_2 + p_2 \\ z = ta_3 + p_3 \end{cases}.$$

Si $c = a_2p_1 - a_1p_2$ y $d = a_3p_2 - a_2p_3$, la recta L es el conjunto de soluciones de sistema

$$\begin{cases} a_2x - a_1y = c \\ a_3y - a_2z = d \end{cases}.$$

Para describir una recta en \mathbb{R}^3 podemos utilizar la ecuación paramétrica $X = tA + P$ (donde $X = (x, y, z)$) o un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

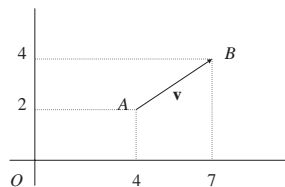
Ángulo entre dos rectas

Para definir el ángulo entre dos rectas usaremos sus vectores dirección, eligiendo entre los ángulos que éstos forman, el único θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Dos rectas en \mathbb{R}^2 ó en \mathbb{R}^3 son *perpendiculares* si sus direcciones lo son.

Dos rectas en \mathbb{R}^2 ó en \mathbb{R}^3 son *paralelas* si sus direcciones lo son.

1.2. Ejercicios

Ejercicio 1.1 Dibujar en el plano:

- (a) dos vectores equivalentes a \mathbf{v} ;
- (b) un vector $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ de igual longitud y dirección que \mathbf{v} , con origen A ;
- (c) un vector \mathbf{u} con origen O , de igual dirección y sentido que \mathbf{v} y de longitud igual a la mitad de la longitud de \mathbf{v} .

Ejercicio 1.2 Sean $A = (3, 2)$; $B = (-1, 5)$; y $C = (2, 2)$

- (a) dibujar $\mathbf{v} = CA$; $\mathbf{w} = CB$; $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$; $\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$; $\mathbf{u} + \mathbf{z}$; $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$
- (b) calcular y dibujar $A - C$; $B - C$; $(A - C) + (B - C)$ y compararlos con \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{u} .

Ejercicio 1.3 Efectuar las operaciones indicadas y graficar:

- (a) $A + B$; $A + 2B$; $A - B$; $A + \frac{1}{2}B$; $A - 3B$, si $A = (3, 2)$ y $B = (2, 4)$
- (b) $A - 3B$; $A + C - B$; $2A - 2(C + B)$, si $A = (1, 2, 0)$; $B = (2, 0, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$

Ejercicio 1.4 Hallar, si es posible, x , y y z tales que:

- (a) $(x, x + 1) = (3, y)$
- (b) $(2x + y, x - 2y) = (1, 3)$
- (c) $(2, 4) = (2x + y, x - 2y)$
- (d) $(1, 2, 3) = x(2, 4, 3) + y(1, 2, 12) + z(0, 0, 3)$
- (e) $(1, 5, 4) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
- (f) $(a, b, c) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

Ejercicio 1.5 Determinar Q para que el vector AB sea equivalente a PQ si:

- (a) $A = (1, 2)$; $B = (0, 2)$; $P = (3, 1)$
- (b) $A = (1, 2)$; $B = (-1, 3)$; $P = (4, 4)$
- (c) $A = (1, 3, 1)$; $B = (1, 2, 1)$; $P = (0, 0, 2)$
- (d) $A = (0, 0, 0)$; $B = (3, 2, 1)$; $P = (1, 0, 0)$

Ejercicio 1.6 Entre los vectores AB ; PQ ; QR ; SQ ; BQ y BP hallar todos los pares de vectores paralelos. ¿Cuáles de ellos tienen el mismo sentido?

$$\begin{array}{lll} A = (1, 3, 1) & P = (2, 0, -3) & R = (2, -1, 4) \\ B = (0, -1, 2) & Q = (-2, -9, 4) & S = (0, -8, 5) \end{array}$$

Ejercicio 1.7 Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento AB para:

- (a) $A = (-2, -1)$; $B = (4, -1)$
- (c) $A = (1, 2, 3)$; $B = (3, 2, 1)$
- (b) $A = (0, 0, 0)$; $B = (2, 4, 6)$

Ejercicio 1.8 Sean A , B , C y D cuatro puntos en el plano tales que $AC \parallel BD$. Si M_1 es el punto medio de AB y M_2 el punto medio de CD , probar que $M_1M_2 \parallel AC$.**Ejercicio 1.9** Si $A = (1, -2, 2)$, $B = (2, -2, 2)$ y M el punto medio de AB , hallar P tal que MP sea:

- (a) equivalente a AB
- (b) paralelo a AB pero de distinto sentido

Ejercicio 1.10 Calcular la longitud de los vectores $(3, 0)$; $(2, 1)$; $(-3, -4)$; $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$; $(-2, 3, 0)$; $3(2, 3, 6)$ **Ejercicio 1.11** Graficar en el plano el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y)\| = 1\}$.**Ejercicio 1.12** Hallar la distancia entre A y B si:

- (a) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$
- (c) $A = (4, -2, 6)$; $B = (3, -4, 4)$
- (b) $A = (4, -2, 6)$; $B = (3, -4, 4)$

Ejercicio 1.13 Determinar todos los valores de k tales que:

- (a) $\|A\| = 2$ si $A = (1, k, 0)$
 (b) $d(A, B) = 2$ si $A = (1, 1, 1)$; $B = (k, -k, 2)$
 (c) $\|A\| = 1$ si $A = k(2, 2, 1)$

Ejercicio 1.14 Si $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$; $\mathbf{w} = (1, 0, 2)$; $\mathbf{u} = (-2, -2, 1)$, calcular:

- (a) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (c) $\|3\mathbf{v} + 3\mathbf{w}\|$ (e) $\left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \right\|$
 (b) $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (d) $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ (f) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u}\|$

Ejercicio 1.15 Si $\mathbf{u} = (a, b, c)$, calcular la norma del vector $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}$

Ejercicio 1.16 En cada caso encontrar los dos vectores unitarios que tienen la misma dirección que A .

- (a) $A = (3, -1)$ (c) $A = (2, -3, 6)$
 (b) $A = (0, 3, 0)$ (d) $A = (a, b, c)$

Ejercicio 1.17 Hallar un vector de longitud 5, de origen O y paralelo a AB si $A = (1, 2, 1)$ y $B = (1, 0, -1)$

Ejercicio 1.18

- (a) Sean $A = (1, 2)$; $B = (-1, -2)$; $C = (-2, 1)$; $D = (1, 0)$; $E = (0, 0)$; $F = (x, y)$; calcular

- | | | |
|------------------|-----------------------|-------------------|
| I- $A \cdot B$ | IV- $B \cdot C$ | VII- $F \cdot A$ |
| II- $A \cdot C$ | V- $B \cdot (C + D)$ | |
| III- $A \cdot E$ | VI- $(D - C) \cdot A$ | VIII- $F \cdot E$ |

- (b) Sean $A = (1, 1, 1)$; $B = (1, -1, 0)$; $C = (2, -1, -1)$; $D = (2, 3, -1)$; $E = (-1, 0, 2)$; calcular

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| I- $A \cdot B$ | IV- $A \cdot (2B - 3C)$ | VII- $D \cdot (A + E)$ |
| II- $A \cdot C$ | V- $A \cdot D$ | |
| III- $A \cdot (B + C)$ | VI- $A \cdot E$ | |

Ejercicio 1.19

- (a) Encontrar y representar en el plano todos los vectores (x, y) ortogonales a:

- I- $A = (1, 2)$ II- $E_1 = (1, 0)$ III- $E_2 = (0, 1)$

- (b) Encontrar todos los vectores (x, y, z) de \mathbb{R}^3 ortogonales a:

- I- $E_1 = (1, 0, 0)$ III- $E_3 = (0, 0, 1)$ V- E_1 y E_3
 II- $E_2 = (0, 1, 0)$ IV- E_1 y E_2 VI- E_2 y E_3

Ejercicio 1.20 Dados $A = (1, -2)$ y $B = (3, 4)$, hallar todos los vectores (x, y) de \mathbb{R}^2 tales que $A \cdot (x, y) = A \cdot B$.

Ejercicio 1.21

- (a) Encontrar un vector ortogonal a $(1, 1)$ de longitud 8. ¿Es único?
 (b) Encontrar todos los vectores ortogonales a $(0, 0, 1)$ de longitud 1; dibujarlos.
 (c) Encontrar un vector que sea ortogonal a A y a B si $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 0, 1)$.

Ejercicio 1.22 Hallar el ángulo que forman A y B en los siguientes casos:

- (a) $A = (1, 1)$, $B = (-1, 0)$ (c) $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (-2, 2\sqrt{3})$
 (b) $A = (1, 2)$, $B = (-2, 1)$ (d) $A = (2, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$

Ejercicio 1.23 En cada caso, encontrar B tal que

- (a) Si $A = (1, 1)$, $\alpha(A, B) = 45^\circ$ y $\|B\| = 2$
 (b) Si $A = (-1, 0)$, $\alpha(A, B) = \pi/3$ y $\|B\| = 1$

Ejercicio 1.24 Encontrar una ecuación paramétrica de:

- (a) la recta que pasa por $(1, 3, -1)$ y tiene dirección $(1, -2, 2)$;
 (b) la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(2, 3)$;
 (c) la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $A = (2, -2, 1)$ y $B = (-3, 2, 1)$;
 (d) dos rectas distintas L_1 y L_2 que pasen por $(-2, 1, 2)$ y sean perpendiculares a la recta $L: X = \mu(2, 2, -2) + (1, 0, 1)$.

Ejercicio 1.25 Encontrar la intersección de cada par de rectas.

(a) $X = \mu(2, 2, 2) + (1, 0, 0)$ $Y = \mu(-1, -1, -1) + (0, -1, -1)$

(b) $X = \mu(1, 3, 1) + (0, -1, 2)$ $Y = \mu(2, -1, 0) + (1, 1, 2)$

(c) $X = \lambda(2, -2, 1) + (3, 0, 2)$ $Y = \lambda(2, 1, -1) + (-2, 1, 2)$

Ejercicio 1.26 Si $A = (1, 2, 2)$, $B = (-1, 1, 2)$, $C = (-2, 2, -1)$, calcular:

$$\begin{array}{llll} A \times B & A \times C & (A \times B) \times C & (A \times B) \cdot C \\ B \times A & A \times (B \times C) & (A \times B) \cdot A & \end{array}$$

Ejercicio 1.27 Hallar \mathbf{v} , de norma 1, que sea ortogonal a $A = (1, 1, 1)$ y a $B = (1, 1, -1)$

Ejercicio 1.28 Calcular el área de:

(a) el paralelogramo de vértices O , A , B y $(A+B)$ si $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, 5, 0)$

(b) el triángulo de vértices $A = (1, 3, 2)$, $B = (1, 5, 0)$ y $C = (1, 1, -2)$

Ejercicio 1.29 Encontrar una ecuación del plano perpendicular a N que pasa por P si:

(a) $N = (1, 2, -1)$; $P = (5, 3, 3)$ (c) $N = (1, 1, -1)$; $P = (2, -5, -3)$

(b) $N = (0, -1, 2)$; $P = (1, 1, 1)$

Ejercicio 1.30 Encontrar una ecuación del plano que contiene a A , B y C si

(a) $A = (1, 1, 0)$; $B = (2, 3, 0)$; $C = (-1, -2, 0)$

(b) $A = (1, 0, 0)$; $B = (0, 1, 0)$; $C = (0, 0, 1)$

(c) $A = (2, -1, 3)$; $B = (2, 1, 1)$; $C = (2, 3, 2)$

Ejercicio 1.31

(a) Hallar una ecuación del plano Π que contiene a los ejes x e y .

(b) Hallar una ecuación del plano Π' que pasa por $(1, 1, -2)$ y es paralelo al plano Π .

Ejercicio 1.32 Si $\Pi: x + y - 2z = 2$, hallar

(a) un vector N , normal a Π ;

(b) dos puntos distintos de Π ;

(c) un plano Π_1 paralelo a Π que pase por el origen;

(d) un plano Π_2 paralelo a Π que pase por $P = (1, 1, -2)$.

Ejercicio 1.33 Si $L: X = \alpha(1, -1, 3) + (0, 2, 1)$ y $A = (1, 2, -3)$,

(a) hallar una ecuación del plano Π que contiene a L y al punto A ;

(b) hallar una ecuación de la recta L' perpendicular a Π que pasa por A ;

(c) calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 1.34 Sea $\Pi: 2x - y + 4z = 6$

(a) Encontrar una ecuación de la recta L perpendicular a Π que pasa por $R = (-1, 3, 2)$.

(b) Hallar el punto Q , intersección de la recta L con el plano Π , y calcular $\|R - Q\|$.

(c) ¿Cuánto vale $d(R, \Pi)$?

Ejercicio 1.35

(a) Dar una ecuación del plano Π que contiene a las rectas $L: X = \lambda(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $L': X = \lambda(-2, -4, 2) + (0, 1, 1)$

(b) Si $L: X = \lambda(1, 2, 0) + (1, 1, 1)$, dar una ecuación del plano Π que contiene a L y tal que la recta $L': X = \lambda(-1, 0, 1) + (1, 2, 3)$ es paralela a Π .

Ejercicio 1.36

(a) Hallar la distancia entre $P = (2, 2, 1)$ y el plano que contiene a las rectas $L: X = \lambda(1, 2, -1) + (1, 3, 2)$ y $L': X = \alpha(2, -1, 3) + (3, 2, 5)$

(b) Hallar la distancia entre $P = (2, 1)$ y la recta $L: x + 2y = 3$.

1.3. Ejercicios Surtidos

Ejercicio 1.1 Sean en \mathbb{R}^2 $A = (2, 2)$, $B = (3, 1)$, y $C = (-2, -1)$, determinar:

- (a) tres puntos distintos D_1, D_2 y D_3 tales que CD_1, CD_2 y CD_3 sean paralelos a AB ;
- (b) D tal que CD y AB sean paralelos y de igual longitud;
- (c) P sobre el eje x tal que OP tenga igual longitud que AB ;
- (d) una condición necesaria y suficiente sobre x e y para que $P = (x, y)$ sea tal que OP tenga igual longitud que AB .

Ejercicio 1.2 Si $A = (2, -3)$ y $L: X = \lambda(3, 4)$, determinar:

- (a) todos los puntos que están en la recta paralela a L que pasa por A y que distan 2 de A ;
- (b) el punto P de la recta L que está a menor distancia de A , ¿cuánto vale $(P - A) \cdot (3, 4)$?

Ejercicio 1.3 Encontrar todos los puntos $P = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 tales que:

- (a) $d(P, O) = 1$
- (b) $d(P, A) = 1$ si $A = (1, 1, 0)$
- (c) P está en el plano $z = 0$ y $d(P, (1, 1, 0)) = 1$
- (d) P está en la recta $L: X = \lambda(0, 1, 0) + (1, 0, 0)$ y $d(P, (1, 1, 0)) = 1$

Ejercicio 1.4 Sea $P = (2, 1, -1)$

- (a) si $\Pi: x_1 + x_2 - x_3$, ¿cuál es el punto de Π a menor distancia de P ?
- (b) si $L: X = \lambda(1, 3, 1) + (2, 2, 0)$, ¿cuál es el punto de L a menor distancia de P ?

Ejercicio 1.5 Si $P = (-1, -3)$ y $L: X = \lambda(1, -1) + (1, 0)$, ¿cuál es el punto de L a menor distancia de P ?

Ejercicio 1.6 Si $A = (2, 1)$, $B = (5, 1)$ y $C = (1, 0)$, hallar D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.

Ejercicio 1.7 Sean en \mathbb{R}^2 $A = (2, 0)$ y $B = (1, 1)$, hallar:

- (a) todos los puntos de \mathbb{R}^2 que equidistan de A y B .
- (b) C de modo que el triángulo ABC sea equilátero, ¿es C único?
- (c) una recta que pase por B y que forme un ángulo de 45° con AB .
- (d) D de modo que el triángulo ABD sea rectángulo en D e isósceles.

Ejercicio 1.8 Sean $\Pi: x_3 = 0$ y $L: X = \lambda(1, 1, -2)$, hallar una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a L . ¿Es única?

Ejercicio 1.9 Sean $\Pi: x_3 = 0$ y $L: X = \lambda(0, 0, 1)$, hallar una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a L . ¿Es única? ¿Cuál es la diferencia con el ejercicio anterior?

Ejercicio 1.10 Probar las siguientes igualdades e interpretarlas geoméricamente:

- (a) $\|A - B\| = \|A + B\| \Leftrightarrow A \cdot B = 0$
- (b) $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0$ (Teorema de Pitágoras)

Ejercicio 1.11 Sea A un vector de longitud 3; si B es un vector que forma un ángulo de 45° con A y tal que $(A - B)$ es ortogonal a A , calcular $\|B\|$.

Ejercicio 1.12 Dado $A = (2, 1, 5)$, determinar si existe B tal que $A \times B = C$ en los siguientes casos:

- (a) $C = (2, 1, -1)$
- (b) $C = (3, 1, -1)$

En caso de existir, ¿es única la solución? ¿Se puede determinar la existencia o no existencia de B sin calcularlo? ¿Cómo?

Ejercicio 1.13 Sean $A = (1, 0, 1)$ y $C = (-2, 1, 2)$; determinar todos los B tales que $A \times B = C$ y $A \cdot B = 1$.

Ejercicio 1.14 Si $A = (2, 2, 0)$ y $B = (x, y, z)$, determinar una condición necesaria y suficiente sobre (x, y, z) para que $A \times B = O$.

Ejercicio 1.15 Con los puntos $A = (1, -1, 0)$; $B = (2, 1, 2)$ y $C = (1, -2, 1)$ se pueden armar tres paralelogramos $ABCD_1$, $ABCD_2$ y $ABCD_3$. Hallar el área de cada uno de estos paralelogramos y el área del triángulo $D_1D_2D_3$.

Ejercicio 1.16 Sean $L: X = (\beta(k^2 + 1, k, k + 7))$ y $\Pi: x + 2y - 3z = 2$; determinar todos los valores de k para los cuales $L \cap \Pi = \emptyset$.

Ejercicio 1.17 Sean $L: X = \beta(2, 3, -1)$ y $\Pi: x_1 + 2x_2 = 0$; determinar:

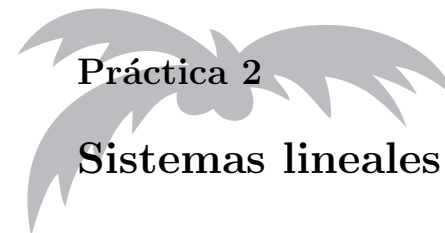
- (a) todos los puntos de \mathbb{R}^3 que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π .
- (b) todos los puntos de L que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π .

Ejercicio 1.18 Sea Π el plano dado por $X = \alpha(0, 2, 1) + \beta(2, 3, 0) + (-1, 0, 1)$; encontrar las ecuaciones de:

- (a) dos rectas L_1 y L_2 , perpendiculares entre sí, ambas contenidas en Π .
- (b) una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a la recta $L: X = t(-2, 3, 1) + (2, 1, 2)$.

Ejercicio 1.19 Si $\Pi_1: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$ y $\Pi_2: -3x_2 + 4x_3 = 3$, hallar todos los puntos P de \mathbb{R}^3 que verifican:

- (a) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$
- (b) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2) = 2$



Práctica 2

Sistemas lineales y matrices

2.1. Definiciones y propiedades

Un *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* es un conjunto de m ecuaciones lineales en las variables (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las a y las b con subíndices representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo i , $1 \leq i \leq m$, se dice que el sistema es *homogéneo*. Una n -upla (s_1, s_2, \dots, s_n) es una solución del sistema si y sólo si al reemplazar x_i por s_i , $1 \leq i \leq n$, se satisface cada una de las m ecuaciones. Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución. Un sistema se dice *compatible* si tiene alguna solución. Si un sistema compatible tiene una solución única es *determinado*, y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

Por *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema, entendemos el arreglo rectangular de números:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

En general, dados los números naturales n y m , se llama *matriz de m filas y n columnas* con coeficientes reales, al arreglo rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Abreviadamente $A = (a_{ij})$.

Llamamos *filas* de A a las n -uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $i = 1, \dots, m$; llamamos *columnas* de A a las m -uplas $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $j = 1, \dots, n$.

Con esta notación, $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ y también $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad: Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

- Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.
- Intercambiar dos de las ecuaciones.
- Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las anteriores operaciones sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

- Multiplicar una de las filas por una constante no nula.
- Intercambiar dos de las filas.
- Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales, consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducidas, que a continuación describiremos. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducidas*, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).
- Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.
- Si dos filas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.
- Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene sólo las primeras tres propiedades se dice que está en la forma *escalonada en filas*.

Llamaremos *rango fila* (o rango) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas equivalentes a A .

En el conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales, notando $\mathbb{R}^{m \times n}$, están definidos la *suma* y el *producto por escalares*, de la siguiente manera: si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Es decir, *suma* y *producto por escalares* se calculan coordenada a coordenada, en forma análoga a como se hace en \mathbb{R}^n .

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = (B^1, \dots, B^s) \in \mathbb{R}^{n \times s}$, el *producto* de A por B es

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^s \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times s}.$$

Notemos que para multiplicar A y B hay que calcular el producto escalar de cada fila de A por cada columna de B . Es posible calcular AB sólo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B .

Propiedades:

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo: $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$

- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, verifica $AI = IA$

para toda matriz cuadrada de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La matriz I es el elemento neutro para este producto.

Notación: El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede escribirse $AX = B$, con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

En adelante identificamos $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Así el sistema se escribirá $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Propiedades: Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, $\mathbb{S}_b = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

- Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución, y que los múltiplos son también soluciones.

- Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_b$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_b$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo, es solución del sistema homogéneo asociado.

- Sea \mathbf{s} una solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{s} \in \mathbb{S}_b$), entonces $\mathbb{S}_b = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}$.

Esto significa que cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular con una otra del sistema homogéneo asociado.

Una *matriz cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *invertible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $AB = BA = I$. Cuando B existe, es única y notamos $B = A^{-1}$.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son invertibles, entonces AC es invertible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Se dice que $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una *matriz elemental* si puede obtenerse a partir de la matriz identidad de $n \times n$ realizando una sola operación elemental sobre las filas.

Propiedades:

- Si la matriz elemental E resulta al efectuar cierta operación sobre las filas de $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces el producto EA es la matriz que resulta al efectuar la misma operación sobre las filas de A .

- Toda matriz elemental es invertible y su inversa es una matriz elemental.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son equivalentes:

- A es invertible.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.
- A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2.2. Ejercicios

Ejercicio 2.1 Dado el sistema lineal:

$$S : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes cuaternas son soluciones de S ? ¿y del sistema homogéneo asociado?

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x} = (2, 2, 1, 0) & \mathbf{z} = (0, 0, 0, 0) & \mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0) \\ \mathbf{y} = (1, 1, 1, 4) & \mathbf{u} = (-2, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, -7) & \mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7) \end{array}$$

Ejercicio 2.2 Determinar, si existen, a y b para que $(2, -2, 1)$ sea solución de:

$$\begin{cases} x_1 + 2ax_2 + x_3 = -1 \\ ax_2 - bx_3 = -4 \\ bx_1 + x_2 + (2a-b)x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.3 Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducidas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{(b)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 2.4 Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz aumentada es $(A|\mathbf{b})$.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 & = (1, 2, -1, 0) \\ \mathbf{b}_2 & = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

$$\text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 & = (1, 2, 1, 2) \\ \mathbf{b}_2 & = (2, 0, -1, 1) \\ \mathbf{b}_3 & = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 & = (5, 3, 2) \\ \mathbf{b}_2 & = (-1, 1, 2) \\ \mathbf{b}_3 & = (2, 1, 1) \\ \mathbf{b}_4 & = (0, 0, 0) \end{array}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 = (2, 1, 2) \\ \mathbf{b}_2 = (0, 0, 0) \\ \mathbf{b}_3 = (1, 0, 0) \\ \mathbf{b}_4 = (0, 1, 0) \end{array}$$

$$(e) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 = (3, 1, -1) \\ \mathbf{b}_2 = (0, -1, -2) \\ \mathbf{b}_3 = (0, 0, 0) \\ \mathbf{b}_4 = (1, 1, 2) \end{array}$$

$$(f) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0, 1 & 0, 2 & 0, 3 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 = (1, 2, 3, 2) \\ \mathbf{b}_2 = (1, -3, 0, 3) \end{array}$$

Ejercicio 2.5 ¿De cuáles de estos sistemas se puede asegurar, sin resolverlos, que tienen soluciones no triviales?

$$(a) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.6 Mostrar tres elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

- (a) $\mathbb{S}_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq 3\}$ (matrices simétricas)
 (b) $\mathbb{S}_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} + a_{ji} = 1, 1 \leq i, j \leq 3\}$
 (c) $\mathbb{S}_3 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = -a_{ji}, 1 \leq i, j \leq 3\}$ (matrices antisimétricas)
 (d) $\mathbb{S}_4 = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / \sum_{i=1}^4 a_{ii} = 0\}$ (matrices de traza nula)
 (e) $\mathbb{S}_5 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$
 (f) $\mathbb{S}_6 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = 0, \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

Ejercicio 2.7 Efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados

- (a) BA (f) ED
 (b) BC (g) DA
 (c) CB (h) $EA + D$
 (d) AB (i) $AE + 3C$
 (e) $BA - C$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.8 Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

- (a) la tercera fila de AB (c) el coeficiente c_{32} de $C = BAB$
 (b) la tercera columna de BA

Ejercicio 2.9 Determinar todas las matrices B que verifican:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.10 Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tales que

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot A = A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.11 Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tales que $AX + B = BX + A$.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Encontrar todas las matrices $C \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tales que $AC = I$.
 (b) ¿Existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tal que $BA = I$?

Ejercicio 2.13 Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles; exhibir la inversa cuando exista.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & G &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & H &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & & \\ E &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & G + H & \end{aligned}$$

Ejercicio 2.14 ¿Cuándo es inversible la matriz $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$?

Hallar D^{-1} .

Ejercicio 2.15 Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + A + I = \mathbf{0}$. Demostrar que $A^{-1} = -I - A$.

Ejercicio 2.16

- (a) Demostrar que si una matriz tiene una fila de ceros no es inversible.
 (b) Demostrar que si una matriz tiene una columna de ceros no es inversible.
 (c) ¿Es necesariamente inversible la suma de dos matrices inversibles?

Ejercicio 2.17 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

- (a) Hallar $\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
 (b) Hallar $\mathbb{S}_b = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$.

Ejercicio 2.18 Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ tales que $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2.19 Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,
 hallar dos vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} , no paralelos, que pertenezcan al conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / A(B\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ y } B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.

Ejercicio 2.20 Sean $(1, 3, 1)$, $(2, 2, 4)$ y $(2, 0, 4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

- (a) Hallar dos vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} , no paralelos, que sean soluciones del sistema homogéneo asociado.
 (b) Encontrar cuatro soluciones del sistema no homogéneo, distintas de las dadas.

Ejercicio 2.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Encontrar tres soluciones distintas de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 (b) Encontrar una recta $\mathbb{L} : X = \lambda \mathbf{v} + P$ tal que todo punto de \mathbb{L} sea solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2.22 Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ a - 3 \\ a + 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determinar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es compatible.
 (b) Resolver el sistema para alguno de los valores de a hallados.

Ejercicio 2.23

- (a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema S tiene solución única.

$$S: \begin{cases} (k^2-1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

- (b) Determinar todos los valores de k para los cuales el sistema S admite solución no trivial.

$$S: \begin{cases} (k+1)x_1 - 2x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + (k+2)x_2 + kx_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 + (k+4)x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.24 Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & a & b & b \end{array} \right)$ (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b+a \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array} \right)$ (d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2+a & b \\ 2 & a-4 & -4 & 2 \\ a-2 & 0 & 12 & 1 \end{array} \right)$

Ejercicio 2.25 Resolver el sistema de ecuaciones para todos los valores de b .

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + 2x_3 - x_4 = b+2 \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3bx_2 + 2x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

Ejercicio 2.26 Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución de

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.27 Hallar todos los valores de k para los cuales $M = \{\lambda(1, 1, 0, 0) + (2, 0, -1, 0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de soluciones de

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.28 Analizar, para todos los valores reales de a y b , las soluciones del sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 2+a & 2-a \\ -1 & -a & a & b \end{array} \right)$$

2.3. Ejercicios Surtidos

Ejercicio 2.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución de

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

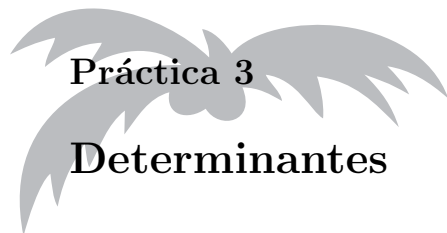
Ejercicio 2.2 Sean A y B en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que si $A + B = I$, entonces $AB = BA$.

Ejercicio 2.3 Sean $\mathbb{A} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ y $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Probar que $XA = AX$ para todo $A \in \mathbb{A}$ si y sólo si

$$X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X \quad \text{y} \quad X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Ejercicio 2.4 Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tales que $BA = AB$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Ejercicio 2.5 Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array} \right)$ tiene como conjunto solución una recta.



Práctica 3

Determinantes

3.1. Definiciones y propiedades

Una *permutación* del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ es un arreglo de estos números en cierto orden, sin omisiones ni repeticiones. Para una permutación cualquiera se escribirá (j_1, j_2, \dots, j_n) , donde j_i es el i -ésimo elemento de la permutación. Se dice que ocurre una *inversión* en una permutación (j_1, j_2, \dots, j_n) siempre que un entero mayor precede a uno menor. Diremos que una permutación es *par*, si el número total de inversiones es un número par, y diremos que es *impar* si el número total de inversiones es impar.

$$\text{Sea } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por *producto elemental tomado de A* se entiende cualquier producto de n elementos tomados de A , sin que dos cualesquiera de ellos provengan de una misma fila ni de una misma columna.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ admite $n!$ ($n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) productos elementales. Estos son de la forma $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ donde (j_1, j_2, \dots, j_n) es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Se denomina *producto elemental con signo tomado de A* a un producto elemental $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ multiplicado por $+1$ ó por -1 según la permutación (j_1, j_2, \dots, j_n) sea respectivamente par o impar.

Se define el *determinante* de A como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de A . Notamos

$$\det(A) = |A| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Propiedades: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A contiene una fila de ceros, $\det(A) = 0$.
- Si A es una matriz triangular de $n \times n$, $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k , entonces $\det(A') = k \cdot \det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A , entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matriz *transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que tiene como filas a las columnas de A .

Propiedades:

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- Si A es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Desarrollo del determinante por cofactores

Si A es una matriz cuadrada, entonces el *menor del elemento* a_{ij} se denota M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i -ésima fila y la j -ésima columna. El número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ se denota C_{ij} y se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij} .

Se puede calcular el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten.

Es decir, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j -ésima columna)

y

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

(desarrollado por cofactores a lo largo de la i -ésima fila)

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y C_{ij} es el cofactor de a_{ij} entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como *matriz de cofactores tomados de A*. La transpuesta de esta matriz se denomina *adjunta de A* y se denota $\text{adj}(A)$.

Propiedad: Si A es una matriz inversible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

Regla de Cramer

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la única solución del sistema es (x_1, x_2, \dots, x_n) con

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar la j -ésima columna de A por \mathbf{b} .

3.2. Ejercicios

Ejercicio 3.1 Calcular, usando la definición, los determinantes de las siguientes matrices.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Ejercicio 3.2 Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Ejercicio 3.3 Determinar los valores de k para los cuales $\det(A) = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix} & \text{(b)} A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 3.4 Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que $\det(A) = 7$. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 3a_{11} & a_{22} + 3a_{12} & a_{23} + 3a_{13} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 3.5 Usando propiedades del determinante, probar que

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0 & \text{(b) Si } x = 0 \text{ ó } x = 3, \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ x^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

Ejercicio 3.6 Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} & \text{por tercera fila, por primera columna} \\ \text{(b)} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} & \text{por segunda fila, por tercera columna} \\ \text{(c)} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \text{por cuarta fila, por quinta columna} \end{array}$$

Ejercicio 3.7 Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por co-factores por las filas o columnas más convenientes.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} & \text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\ \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} & \text{(d)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 3.8 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; calcular $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

Ejercicio 3.9 Sin calcular la matriz inversa, decidir si son inversibles las matrices dadas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 3.10 Determinar todos los valores reales de x para los cuales la matriz es inversible.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Elegir en cada caso tres valores de x para los cuales la matriz respectiva es inversible.

Ejercicio 3.11 Si $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

$$\text{(a)} \det(2A) \quad \text{(b)} \det((3A)^{-1}) \quad \text{(c)} \det(3A^{-1})$$

Ejercicio 3.12 Probar que los siguientes sistemas tienen solución única.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 3 \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 3.13 Determinar en cada caso todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales en sistema tiene solución única.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (2k-2)x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + (k-3)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + 3kx_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 3.14 Encontrar el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones y resolver el sistema para el valor hallado.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ a^2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = a \end{cases}$$

Ejercicio 3.15 Determinar los valores de k para los cuales el sistema tiene:

I. ninguna solución. II. solución única III. infinitas soluciones

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \begin{cases} -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ (k^2-3)x_1 - x_3 = k^2+k-1 \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + (k^2-8)x_3 = k+14 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 3.16 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$; encontrar todos los valores de a para los cuales el sistema $Ax = x$ admite solución no trivial.

Ejercicio 3.17 Sea el sistema
$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 6 \\ 3x + 7y - z + w = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w = -3 \\ x + y + z + 2w = 3 \end{cases}$$

- Aplicar la regla de Cramer para despejar la incógnita z sin despejar las demás incógnitas.
- Resolver completamente el sistema usando la regla de Cramer.
- Resolver el sistema usando Gauss.
- Decidir cuál de las dos estrategias usadas en (b) y (c) es más económica en cálculos.

Ejercicio 3.18 Aplicar la regla de Cramer para despejar z y w en términos de x e y .

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w \\ y = \frac{4}{5}z - \frac{3}{5}w \end{cases}$$

Ejercicio 3.19 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

- hallar $\text{adj}(A)$.
- calcular A^{-1} .

Ejercicio 3.20 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\det(A) = 1$ y todos los coeficientes de A son enteros.

- Probar que todos los coeficientes de A^{-1} son enteros.
- Probar que si todos los coeficientes de \mathbf{b} son enteros, la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene todos sus coeficientes enteros.

3.3. Ejercicios surtidos

Ejercicio 3.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$; calcular $\det(B^{-1})$.

Ejercicio 3.2 Analizar las soluciones del sistema S para todos los valores reales de k .

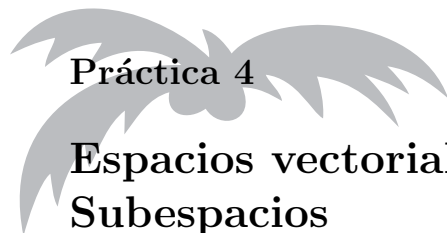
$$S : \begin{cases} kx_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 1)x_2 + (k + 1)x_3 = 1 \\ kx_1 + (k^2 + 2)x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3.3 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(B) = -3$; hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

Ejercicio 3.4 Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a - 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; decidir para qué valores de a el sistema $(A^2 + 2A)\mathbf{x} = 0$ tiene solución no trivial.

Ejercicio 3.5 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

- determinar todos los valores de x para los cuales:
 - AC es inversible.
 - BC es inversible.
 - $(A + B)C$ es inversible.
- calcular $((A + B)C)^{-1}$ para $x = 1$.



Práctica 4

Espacios vectoriales - Subespacios

4.1. Definiciones y propiedades

Espacios vectoriales

Un *espacio vectorial real* \mathbb{V} , o espacio vectorial sobre \mathbb{R} , es un conjunto de elementos llamados *vectores*, junto con dos operaciones: *suma* y *producto por un escalar*, que satisfacen las siguientes propiedades:

- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces el producto $k\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- Si \mathbf{u}, \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, entonces $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
- Existe un elemento en \mathbb{V} , notado $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.
- Para cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ existe $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Si \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
- Si \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$.
- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$.
- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, entonces $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ($1 \in \mathbb{R}$).

Notación: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Propiedades: Sea \mathbb{V} un espacio vectorial real

- $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $-(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{v} - \mathbf{w}$ para todo \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
- $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$ para todo \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.
- $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Subespacios

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial real, y sea \mathbb{W} un subconjunto de \mathbb{V} ; \mathbb{W} es un *subespacio* de \mathbb{V} si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- El vector $\mathbf{0}$ de \mathbb{V} pertenece a \mathbb{W} .
- Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son elementos de \mathbb{W} , entonces su suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a \mathbb{W} .
- Si \mathbf{v} es un elemento de \mathbb{W} y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{v}$ pertenece a \mathbb{W} .

Observación: \mathbb{W} es un espacio vectorial real.

Propiedad: Si \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios de un espacio vectorial \mathbb{V} , entonces la intersección $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

Combinaciones Lineales

Sean \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ elementos de \mathbb{V} ; se dice que un vector \mathbf{w} es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ si se puede expresar en la forma $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$, donde k_1, \dots, k_n son números reales.

Si todo elemento de \mathbb{V} es un combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ decimos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ genera \mathbb{V} o que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un *conjunto de generadores* de \mathbb{V} .

$\mathbb{W} = \{\sum_{i=1}^r k_i \mathbf{v}_i / k_i \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} que se denomina *subespacio generado* por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ y se nota $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

Propiedad: Si \mathbb{W} es un subespacio de \mathbb{V} y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, son vectores de \mathbb{W} , entonces $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle \subseteq \mathbb{W}$. O sea $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ es un subespacio de \mathbb{V} que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$.

Dependencia e Independencia lineal

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , y sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ elementos de \mathbb{V} ; decimos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es *linealmente dependiente* si existen números reales a_1, \dots, a_n , no todos iguales a cero, tales que $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Decimos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es *linealmente independiente* si y sólo si se satisface la siguiente condición: siempre que a_1, \dots, a_n sean números reales tales que $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, entonces $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Propiedades: Sea \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vectores de \mathbb{V} ; son equivalentes:

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente.
- $\{\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, es linealmente independiente.
- $\{\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ con $k \in \mathbb{R}$, es linealmente independiente.

De aquí en más, cuando decimos espacio vectorial entenderemos espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Bases

Una *base* de un espacio vectorial \mathbb{V} es una sucesión de elementos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de \mathbb{V} tales que:

- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ genera \mathbb{V} .
- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

Se dice que un espacio vectorial \mathbb{V} , diferente de cero, es de *dimensión finita* si contiene un sucesión finita de vectores que forman una base de \mathbb{V} .

Propiedad: Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

Si \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión finita, la *dimensión* de \mathbb{V} es el número de vectores que tiene cualquier base de \mathbb{V} . Si $\mathbb{V} = \{\mathbf{0}\}$, entonces \mathbb{V} no tiene base y se dice que su dimensión es cero.

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial, y $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de \mathbb{V} . Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$, entonces (a_1, \dots, a_n) son las *coordenadas de \mathbf{v} con respecto a la base B* , y notamos $(\mathbf{v})_B = (a_1, \dots, a_n)$.

Observación: Las coordenadas de un vector dependen de la base. Recuerde que cuando se da una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, importa el orden en que se dan los vectores.

Suma de subespacios

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial, y sean \mathbb{S} y \mathbb{T} subespacios de \mathbb{V} ; se define la *suma* de \mathbb{S} y \mathbb{T} como $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / \mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}, \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S} \text{ y } \mathbf{t} \in \mathbb{T}\}$.

Propiedades:

- $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- Si $\dim \mathbb{V} = n$, entonces $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{T} - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$.

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial; si \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios de \mathbb{V} que verifican simultáneamente $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{V}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{\mathbf{0}\}$, entonces \mathbb{V} es la *suma directa* de \mathbb{S} y \mathbb{T} , y se nota $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.

En general, si $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ verifica $\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{T}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{\mathbf{0}\}$, se dirá que \mathbb{W} es la suma directa de \mathbb{S} y \mathbb{T} , y se notará $\mathbb{W} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.

Espacio Euclídeo

Llamamos *espacio euclídeo* de dimensión n al espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto interno $(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

Si $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores de \mathbb{R}^n , diremos que C es un *conjunto ortogonal* de vectores si todos los pares de vectores distintos de C son ortogonales.

Es decir:

$$\forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq r \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Si $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores de \mathbb{R}^n , diremos que C es un *conjunto ortonormal* de vectores si es un conjunto ortogonal y todos sus vectores tienen norma 1.

Es decir:

$$\forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq r \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{y}$$

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq r \quad \|\mathbf{v}_i\| = 1$$

Propiedades:

- Si C es un conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector nulo, C es un conjunto linealmente independiente.
- Todo conjunto ortonormal de vectores es linealmente independiente.

Una *base ortogonal* de \mathbb{R}^n , es una base de \mathbb{R}^n que es también un conjunto ortogonal.

Una *base ortonormal* de \mathbb{R}^n , es una base de \mathbb{R}^n que es también un conjunto ortonormal.

Propiedades:

- Todo conjunto ortonormal de vectores de \mathbb{R}^n se puede extender a una base ortonormal de \mathbb{R}^n .
- \mathbb{R}^n admite una base ortonormal.
- Todo subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^n admite una base ortonormal.
- Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_n)$.

Si \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{R}^n , el conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\}$ se llama *complemento ortogonal* de \mathbb{S} y se nota \mathbb{S}^\perp .

Propiedades:

- \mathbb{S}^\perp es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- $\dim \mathbb{S}^\perp = n - \dim \mathbb{S}$ y $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp = \mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{S}^\perp)^\perp = \mathbb{S}$.
- Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$, \mathbf{w} es ortogonal a \mathbf{v} para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ si y sólo si $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i = 0$ para $1 \leq i \leq r$.

Observación: Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$, para hallar \mathbb{S}^\perp basta buscar $n - r$ vectores linealmente independiente que sean ortogonales a todos los \mathbf{v}_i .

Si $\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ con $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{s}_2 \in \mathbb{S}^\perp$, \mathbf{s}_1 se llama *proyección ortogonal* de \mathbf{v} sobre \mathbb{S} .

Propiedad: Esta proyección ortogonal es el punto de \mathbb{S} que está a menor distancia de \mathbf{v} , es decir que $\|\mathbf{v} - \mathbf{s}_1\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\| \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{S}$.

4.2. Ejercicios

Ejercicio 4.1 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios.

- (a) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$
- (b) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2^2 < -1\}$
- (c) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$
- (d) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 - 4x_3^2 = 0\}$
- (e) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - 3x_3 + x_5 = 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$
- (f) $\mathbb{W} = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 / \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0 \right\}$
- (g) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 4x_2 \leq 0\}$
- (h) $\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / x_{11} + x_{21} - x_{23} = 1\}$
- (i) $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$
- (j) $\mathbb{W} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \right\}$
- (k) $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \text{Tr}(A) = 0\}$

Ejercicio 4.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Probar que $\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ es subespacio de \mathbb{R}^n .

Ejercicio 4.3 Sea \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sean $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$.

- (a) Demostrar que $\mathbb{W} = \{k\mathbf{v}_0 / k \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- (b) Demostrar que $\mathbb{W}' = \{k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 / k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

Ejercicio 4.4 Sean \mathbf{w}_1 y $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{W}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 = 0\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 = 0\}$.

- (a) Probar que \mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 son subespacios de \mathbb{R}^n .
- (b) Representar \mathbb{W}_1 y \mathbb{W}_2 para $n = 2$, $\mathbf{w}_1 = (-2, 1)$ y $\mathbf{w}_2 = (1, 0)$.
- (c) Representar \mathbb{W}_2 para $n = 2$, $\mathbf{w}_1 = (-2, 1)$ y $\mathbf{w}_2 = (2, -1)$. Comparar con(b).

Ejercicio 4.5 Describir geoméricamente el subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^3 y decidir si el vector $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$.

- (a) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 3) \rangle$ $\mathbf{w} = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$
- (b) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$ $\mathbf{w} = (-5, -10, -15)$
- (c) $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3) \rangle$ $\mathbf{w} = (3, 0, 6)$

Ejercicio 4.6 Decidir si los siguientes conjuntos de vectores generan \mathbb{V} .

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$
- (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4 \quad \{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$

Ejercicio 4.7 Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

- (a) $\{(1, 2, 2), (-3, 1, -1), (-1, 5, 3)\}$
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (c) $\{(1, 2, 3, 4, 5)\}$
- (d) $\{\mathbf{v}\}$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ (\mathbb{V} un espacio vectorial real)
- (e) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ con $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 \neq 0$, $\mathbf{v}_2 \neq 0$, tales que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$

Ejercicio 4.8

- (a) Probar que $\{(a, b), (c, d)\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^2 si y sólo si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$
- (b) Hallar tres vectores de \mathbb{R}^3 que sean linealmente dependientes, y tales que todo subconjunto formado por dos cualesquiera de ellos sea linealmente independiente.

Ejercicio 4.9 Determinar los valores reales de k para los cuales los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

- (a) $\{(0, 1, 3), (-1, 1, k), (1, -2, 0)\}$
- (b) $\{(1, -1, 2), (k, k-1, k+6), (k-1, k, 1)\}$
- (c) $\left\{ \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 4.10 Sean \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 vectores linealmente independientes $\in \mathbb{V}$.

- (a) Si $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, decidir sobre la independencia o dependencia lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\}$.
- (b) Probar que si $\mathbf{w} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 4.11 Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente, ¿para qué valores de α y β es $\{\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2, \alpha\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_3\}$ linealmente independiente?

Ejercicio 4.12 Hallar base y dimensión de los siguientes subespacios.

- (a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$
 (b) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$
 (c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / x_1 - 2x_3 = 2x_1 + x_2 + 2x_4 = x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$
 (d) $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$
 (e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + x_3\}$
 (f) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 (g) $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 3), (3, 1, 1) \rangle$
 (h) $\mathbb{S} = \langle (2, 6, -1), (-1, -3, \frac{1}{2}) \rangle$
 (i) $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 4.13

- (a) Decidir si los conjuntos de vectores dados en el ejercicio 6 son bases del espacio respectivo.
 (b) Decidir, sin hacer cuentas, si las siguientes sucesiones de vectores son bases de \mathbb{R}^3
- i) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
 - ii) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$
 - iii) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
 - iv) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 2)\}$
 - v) $\{(1, 0, 1), (1, 2, 3), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

Ejercicio 4.14 Decidir en cada caso si es posible extender el conjunto de vectores a una base $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. En caso afirmativo encontrar dos bases distintas.

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$
 (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \right\}$
 (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 4.15 Decidir en cada caso si es posible extraer una base del espacio \mathbb{V} , de los siguientes conjuntos de vectores. En caso afirmativo encontrar dos bases distintas.

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (-2, 1, 4)\}$
 (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad \{(2, 0, 0), (0, -1, 3), (2, 1, -3), (2, -1, 3)\}$
 (c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 4.16 Hallar dos bases distintas de \mathbb{V} que contengan una base de \mathbb{S} .

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 3}$
 $\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / x_{11} + x_{12} = x_{13} - x_{23} = x_{11} + x_{12} - x_{13} + x_{23} = 0\}$
 (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4 \quad \mathbb{S} = \langle (2, -1, 0, 2), (-1, 0, 3, 1), (0, -1, 6, 4) \rangle$

Ejercicio 4.17 Sea $\mathbb{T}_k = \langle (0, k, -1), (1, 0, -1), (-2, 1, 0) \rangle$. Estudiar la dimensión de \mathbb{T}_k para todos los valores de $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.18 Decidir si el conjunto B es una base para el subespacio de soluciones del sistema S .

- (a) $B = \{(1, 2)\} \quad S: 2x_1 - x_2 = 0$
 (b) $B = \{(1, 1)\} \quad S: 2x_1 - x_2 = 0$
 (c) $B = \{(1, 3, 1)\} \quad S: 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
 (d) $B = \{(1, 2, 1), (1, 1, 0)\} \quad S: x_1 - x_2 + x_3 = 0$
 (e) $B = \{(1, 1, 0)\} \quad S: \begin{cases} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{cases}$
 (f) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad S: \begin{cases} a_{11} & = & a_{12} \\ a_{21} & = & 0 \end{cases}$
 (g) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad S: a_{11} - a_{12} + a_{21} = 0$

Ejercicio 4.19 En cada caso encontrar una ecuación lineal cuyo conjunto de soluciones contenga al subespacio \mathbb{S}

- (a) $\mathbb{S} = \langle (1, 2) \rangle$ (c) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1), (2, 0, 0) \rangle$
 (b) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1) \rangle$ (d) $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Analizar si el conjunto de soluciones de la ecuación hallada es igual al subespacio \mathbb{S} .

Ejercicio 4.20 Encontrar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea \mathbb{S} .

- (a) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$
 (b) $\mathbb{S} = \langle (1, 0, -1, 2), (1, 1, -1, -1) \rangle$
 (c) $\mathbb{S} = \langle (-1, 1, -1, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1) \rangle$
 (d) $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 4.21 Determinar si los subespacios \mathbb{S} y \mathbb{T} son iguales.

- (a) $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 1), (0, 2, 1) \rangle$ $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$
 (b) $\mathbb{S} = \langle (-1, 2, 1), (0, 1, 2) \rangle$ $\mathbb{T} = \langle (-1, 3, 3), (0, 0, 1) \rangle$
 (c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2x_2 + x_3 = 0\}$
 $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 2x_2 + x_3 = 0\}$
 (d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + 2x_4 = 2x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 + x_3 + 5x_4 = 0\}$
 $\mathbb{T} = \langle (1, 1, -2, 0) \rangle$

Ejercicio 4.22 Sean en \mathbb{R}^3 las bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B'' = \{(-1, 1, 0), (4, -2, 1), (0, 0, 3)\}$; hallar las coordenadas con respecto a las bases B , B' y B'' de:

- (a) $(2, 3, -1)$ (b) $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Ejercicio 4.23 Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 4.24

- (a) Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 ; sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ los vectores de \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas respecto de B son $(1, -2, 3)$, $(0, 2, -1)$ y $(0, 0, 2)$ respectivamente. Determinar si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es linealmente independiente.
 (b) Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 y sea $\mathbb{T}_k = \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_4 \rangle$. Determinar todos los valores de k en \mathbb{R} para los cuales $\dim \mathbb{T}_k = 3$.

Ejercicio 4.25 Hallar base y dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

- (a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
 $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$
 (b) $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 (c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ $\mathbb{T} = \langle (0, -3, 0), (1, 1, 1) \rangle$
 (d) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 2), (1, -2, 0) \rangle$ $\mathbb{T} = \langle (4, 0, -2), (2, 0, -1) \rangle$

Ejercicio 4.26 Hallar base y dimensión de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$, para los subespacios del ejercicio anterior.

Ejercicio 4.27 Determinar en qué casos es $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$ para los subespacios del ejercicio 25, donde \mathbb{V} es respectivamente

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ (d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

Ejercicio 4.28

- (a) Sean en \mathbb{R}^2 , $\mathbb{S} = \langle (1, 1) \rangle$, $\mathbb{T} = \langle (1, 3) \rangle$, $\mathbb{W} = \langle (1, 0) \rangle$. Probar $\mathbb{R}^2 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.
 (b) Determinar si $\mathbb{R}^{2 \times 2} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, donde $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right\rangle$
 (c) Determinar si $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, donde $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 = 0\}$
 $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_2 - 5x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$

Ejercicio 4.29

- (a) Si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, probar que $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{T}$. ¿Es cierta la recíproca?
 (b) Probar que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$ si y sólo si para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen únicos $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$.

Ejercicio 4.30 Hallar dos subespacios distintos \mathbb{T} y \mathbb{T}' tales que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}'$.

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$
 $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
- (c) $\mathbb{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$

Ejercicio 4.31 Sean $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\mathbb{T} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{12} = a_{11} + 2a_{21} - a_{22} = 0\}$.

- (a) Probar que $\mathbb{R}^{2 \times 2} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.
- (b) Escribir $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ como $\mathbf{w} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ con $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$.
- (c) Escribir $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ como $\mathbf{w} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ con $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$.

Ejercicio 4.32 Sean en \mathbb{V} los subespacios \mathbb{S} y \mathbb{T} . Hallar un subespacio \mathbb{W} tal que $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{W}$ y $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{W}$.

- (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
 $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$
 $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\}$
- (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 $\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} + x_{12} + x_{21} = x_{12} + x_{21} = \text{Tr}(X) = 0\}$
 $\mathbb{T} = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} - x_{12} + x_{21} + 2x_{22} = x_{12} + x_{21} = x_{11} - 2x_{12} + 2x_{22} = 0\}$

Ejercicio 4.33 Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

- (a) Encontrar un subespacio $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente: $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ y $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$.
- (b) ¿Puede elegirse \mathbb{T} tal que $\dim \mathbb{T} = 2$?

Ejercicio 4.34 Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

- (a) Encontrar un subespacio \mathbb{T} de dimensión 2 tal que $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.
- (b) Para el subespacio \mathbb{T} hallado en (a), caracterizar $\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{T}$. ¿Depende \mathbb{W} de la elección de \mathbb{T} realizada en (a)?

Ejercicio 4.35 Sean en \mathbb{R}^4 los subespacios:

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 - x_4 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0\}$$

- (a) Determinar todos los valores reales de a, b, c, d para los cuales la suma $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ no es directa.
- (b) Caracterizar $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.
- (c) Elegir una de las cuaternas (a, b, c, d) halladas en (a) y expresar $\mathbf{v} = (-3, 2, 0, 1)$ en la forma $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ con $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$, de dos maneras distintas.

Ejercicio 4.36 Decidir si los siguientes conjuntos son ortogonales.

- (a) $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$ (c) $C = \{(1, 0, 3), (-3, 0, 1)\}$
- (b) $C = \{(1, 0), (0, -1), (1, -1)\}$ (d) $C = \{(2, -1, 0), (0, 0, 4), (1, 2, 0)\}$

Ejercicio 4.37 Encontrar todos los vectores ortogonales a todos los vectores del conjunto $\{(1, -1, 2), (0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 4.38 Comprobar que $B = \{(2, -1, 0), (1, 2, 3), (3, 6, -5)\}$ es una base ortogonal de \mathbb{R}^3 , y calcular las coordenadas del vector $(5, -1, 2)$ en la base B .

Ejercicio 4.39

- (a) Dar dos bases ortonormales distintas de \mathbb{R}^3 .
- (b) Encontrar las coordenadas de $(3, 2, -5)$ en cada una de las bases dadas.
- (c) Encontrar las coordenadas de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en cada una de las bases dadas.

Ejercicio 4.40 Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 = 0\}$.

- (a) Encontrar una base ortogonal de \mathbb{S} .
- (b) Extender la base hallada a una base ortogonal de \mathbb{R}^4 .
- (c) Encontrar el complemento ortogonal de \mathbb{S} .

Ejercicio 4.41 Sea $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 3), (2, 3, -1) \rangle$.

- (a) Encontrar una base ortogonal de \mathbb{S} .
- (b) Extender la base hallada a una base ortogonal de \mathbb{R}^3 .
- (c) Encontrar el complemento ortogonal de \mathbb{S} .

Ejercicio 4.42 En \mathbb{R}^3 , hallar el complemento ortogonal de:

- (a) El eje y .
- (b) El plano coordenado xz .
- (c) El plano de ecuación $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.
- (d) La recta de ecuación $\mathbf{x} = \lambda(2, 1, -4)$.

Ejercicio 4.43 Dar una base de \mathbb{S}^\perp .

- (a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 + x_4 = x_2 - x_4 = 0\}$
- (b) $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 2, 1), (1, 0, -1, 2), (-1, -1, 4, -3) \rangle$

Ejercicio 4.44 Sea $\mathbb{S} = \langle (1, -1, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1, -1) \rangle$. Hallar una base de \mathbb{S}^\perp , y dar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio \mathbb{S} .

Ejercicio 4.45 Hallar el punto Q del plano $5x - 3y + z = 0$, que está más próximo al punto $P = (1, -2, 4)$. Calcular la distancia del punto P al plano.

4.3. Ejercicios surtidos

Ejercicio 4.1 Sea Π el plano que contiene a los puntos $(2, -1, -4)$, $(6, 5, 4)$ y $(5, 3, 2)$. ¿Es Π un subespacio de \mathbb{R}^3 ?

Ejercicio 4.2 Sean $\mathbb{S} = \langle (-1, 2, 1), (1, 0, 3) \rangle$ y $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$; ¿qué condiciones debe cumplir P para que $\mathbb{W} = \mathbb{S} + P$ sea un subespacio?

Ejercicio 4.3 Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^3$ la recta $X = \lambda(1, -1, 1)$. Determinar ecuaciones de tres subespacios distintos de dimensión 2: \mathbb{S}_1 , \mathbb{S}_2 y \mathbb{S}_3 en \mathbb{R}^3 tales que $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 \cap \mathbb{S}_3 = \mathbb{L}$. Calcular $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$, $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_2 \cap \mathbb{S}_3$.

Ejercicio 4.4 Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 : $\mathbb{S}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ y $\mathbb{S}_2 = \langle (-1, 0, 0, 1), (-2, -1, 2, 3), (3, 2, -4, -5) \rangle$

- (a) Determinar $\mathbb{T} = \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$
- (b) Determinar un subespacio $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que: $(0, 1, -1, 0) \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4.5 Sean en \mathbb{R}^3 los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que: $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \oplus \mathbb{S} = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.6 Sean en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ los subespacios:

$$\mathbb{S}_1 : x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_2 : \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{21} - 3x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{21} = 0 \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{S}_2$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_3 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Ejercicio 4.7 Sean en \mathbb{R}^4 los subespacios: $\mathbb{S} = \langle (2, 0, 1, 1), (2, -1, 0, \lambda) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_4 = x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$. Hallar todos los valores reales de λ para los cuales es $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{\mathbf{0}\}$. Para esos valores de λ , hallar una base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Ejercicio 4.8 Se sabe que $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 y que las coordenadas de los vectores $(1, -1, 1)$, $(1, -1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ en la base B son, respectivamente, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, -1)$ y $(1, 0, 1)$. Hallar la base B .

Ejercicio 4.9 Hallar una base B de \mathbb{R}^3 en la cual el vector $(1, -1, 2)$ tenga coordenadas $(1, 1, -1)$ y el vector $(1, 1, -1)$ tenga coordenadas $(1, -1, 2)$.

Ejercicio 4.10 Sabiendo que $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente, determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $D = \{\lambda\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \lambda\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3\}$ sea linealmente independiente.

Ejercicio 4.11 Sean $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linealmente independiente y $\mathbb{T} = \langle \lambda\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 \rangle$. Determinar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales es $\dim \mathbb{T} = 2$.

Ejercicio 4.12 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ base de un espacio vectorial \mathbb{V} . Sean $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \rangle$.

- (a) Determinar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ y una base $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
- (b) Hallar un subespacio $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ tal que $\mathbb{W} \oplus (\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = \mathbb{V}$.

Ejercicio 4.13 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de un espacio vectorial \mathbb{V} . Probar que $B' = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ es una base de \mathbb{V} y encontrar las coordenadas de los vectores de B en la base B' .

Ejercicio 4.14 Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / AX = X\}$.

- (a) Probar que \mathbb{S} es un subespacio.
- (b) Hallar una base de $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ que contenga a una base de \mathbb{S} .

Ejercicio 4.15 Dado $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, determinar el conjunto \mathbb{T} de todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que verifican $XS = SX \quad \forall S \in \mathbb{S}$. ¿Es \mathbb{T} un subespacio? En caso afirmativo hallar su dimensión.

Ejercicio 4.16 Dado el plano Π que contiene a los puntos $A = (2, 0, -1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 2, 1)$ verificar que Π es un subespacio de \mathbb{R}^3 y hallar un subespacio \mathbb{S} tal que $\Pi \oplus \mathbb{S} = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.17 Hallar un base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

$$\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{12} - a_{21} = a_{12} + a_{22} - 3a_{32} = a_{11} - a_{22} - a_{33} = 0\}.$$

Ejercicio 4.18 Sea $\mathbb{T} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{11} + 2a_{22} = 3a_{12} + a_{21} = 0\}$. Encontrar un subespacio $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ejercicio 4.19 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz inversible. Probar que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ son linealmente independientes si y sólo si $A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Ejercicio 4.20 Sea $\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^{4 \times 1} / AX = A^t X\}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Hallar una base de \mathbb{S} .
- Definir un subespacio $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$ que satisfaga $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^{4 \times 1}$.

Ejercicio 4.21 Hallar el punto Q de la recta de ecuación $\mathbf{x} = t(-2, 4, 1)$, que esté más próximo al punto $P = (4, 1, -8)$.

Ejercicio 4.22 Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_4 = x_3 = 0\}$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 0, -1)$.

- Probar que $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$.
- Encontrar el elemento $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ que está más próximo a \mathbf{v} .
- Encontrar el elemento $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ que está más próximo a \mathbf{v} .
- ¿Cuál de los dos, \mathbf{s} ó \mathbf{t} , está más próximo a \mathbf{v} ?

Ejercicio 4.23 Sean $\mathbb{S} = \langle (-1, 1, 2, 1), (-1, 2, 1, 0) \rangle$ y $\mathbf{v} = (3, 1, 1, 0)$. Hallar una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de \mathbb{S}^\perp tal que $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.

Práctica 5

Transformaciones lineales

5.1. Definiciones y propiedades

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Una *transformación lineal* $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una función que satisface las siguientes dos propiedades:

- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.
- Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, $f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$.

Son transformaciones lineales:

- La función nula $0 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ dada por $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- La función identidad $\text{id} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, dada por $\text{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Propiedades: Cualquier transformación lineal $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ satisface:

- $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$ para todo \mathbf{v} y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
- $f(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + a_nf(\mathbf{v}_n)$ para todo $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_i \in \mathbb{V}$.

Notación: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, $\mathbb{T} \subset \mathbb{W}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$, notamos:

- $f(\mathbb{S}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{W} / \mathbf{w} = f(\mathbf{s}), \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\}$
- $f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$
- $f^{-1}(\mathbb{T}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T}\}$

Propiedades:

- Si \mathbb{S} es subespacio de \mathbb{V} , entonces $f(\mathbb{S})$ es subespacio de \mathbb{W} .
- Si \mathbb{T} es subespacio de \mathbb{W} , entonces $f^{-1}(\mathbb{T})$ es subespacio de \mathbb{V} .

Teorema: Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} , y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en \mathbb{W} , entonces hay una única transformación lineal $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \dots, f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Este teorema nos dice que una transformación lineal está completamente determinada por los valores que toma en una base.

Notación: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, llamamos:

- *núcleo* de f al conjunto $\text{Nu } f = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$.
- *imagen* de f al conjunto $\text{Im } f = \{\mathbf{w} \in \mathbb{W} / \mathbf{w} = f(\mathbf{v}), \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{V}\}$.

Observación: $\text{Im } f = f(\mathbb{V})$.

Propiedades: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

- $\text{Nu } f$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- $\text{Im } f$ es un subespacio de \mathbb{W} .
- Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de generadores de \mathbb{V} , entonces $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto de generadores de $\text{Im } f$.
- Si $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente.

Definición: Decimos que una transformación lineal $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$.
- *epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $\text{Im } f = \mathbb{W}$.
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

- f es monomorfismo $\Leftrightarrow \text{Nu } f = \{\mathbf{0}\}$.
- Si f es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.
- f es isomorfismo si y sólo si: “Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es base de \mathbb{V} , entonces $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es base de \mathbb{W} ”.

Teorema de la dimensión: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim \mathbb{V} = \dim \text{Nu } f + \dim \text{Im } f$$

Propiedades:

- Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ son transformaciones lineales, la composición $g \circ f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$, dada por $(g \circ f)(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v}))$, es transformación lineal.
- Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es isomorfismo, la función inversa $f^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$, que cumple $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{W}}$ y $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{V}}$, es isomorfismo.
- Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ son isomorfismos, $(g \circ f)$ es isomorfismo y verifica:

$$(g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Definición: Una transformación lineal $p : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es un proyector si $p \circ p = p$.

Propiedades: Si $p : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es un proyector, entonces

- $\mathbb{V} = \text{Nu } p \oplus \text{Im } p$
- Para todo $\mathbf{v} \in \text{Im } p$, $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Dada la transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que f puede escribirse en la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ó } f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Esta matriz A tal que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se denomina *matriz de la transformación lineal* f , y escribimos $A = M(f)$.

Propiedad: Las columnas de $M(f)$ son un conjunto de generadores de $\text{Im } f$.

Definición: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, el *rango columna* de A es la dimensión del subespacio generado por las columnas de A ; el *rango fila* de A es la dimensión del subespacio generado por las filas de A .

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces $\text{rango fila de } A = \text{rango columna de } A$. Esta igualdad nos permite hablar de rango de A , que notamos $\text{rg } A$.

Propiedad: $\dim \text{Im } f = \text{rg } M(f)$.

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la dimensión del subespacio de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $n - \text{rg } A$.

Definición: Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ base de un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión n y $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ base de un espacio vectorial \mathbb{W} de dimensión m .

Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal y $f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + \dots + a_{mj}\mathbf{w}_m$, $1 \leq j \leq n$, llamamos *matriz asociada a f en las bases B y B'* , a la matriz de $m \times n$:

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notar que en la columna j de $M_{BB'}(f)$ están las coordenadas de $f(\mathbf{v}_j)$ en base B' .

La matriz $M_{BB'}(f)$ es tal que si $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $M_{BB'}(f)(\mathbf{v})_B = (f(\mathbf{v}))_{B'}$.

Observación: Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y E y E' son las respectivas bases canónicas, $M_{EE'}(f) = M(f)$.

Notación: Si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ y $B' = B$, escribimos $M_B(f)$ en lugar de $M_{BB'}(f)$.

Propiedad: $\text{rg } M_{BB'}(f) = \dim \text{Im } f$; de esto se deduce que el rango de una matriz asociada a una transformación lineal no depende de las bases elegidas.

Propiedad: (*matriz de la composición*)

Sean \mathbb{U}, \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales, y sean B, B' y B'' bases de \mathbb{U}, \mathbb{V} y \mathbb{W} respectivamente. Si $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ son transformaciones lineales, se tiene:

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g)M_{BB'}(f)$$

Propiedad: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es un isomorfismo, y B y B' son bases de \mathbb{V} y \mathbb{W} respectivamente,

$$M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1}.$$

Definición: Si B y B' son dos bases del espacio vectorial \mathbb{V} , llamamos *matriz de cambio de base* de B a B' , a la matriz $C_{BB'} = M_{BB'}(\text{id})$.

Propiedad: $C_{B'B} = (C_{BB'})^{-1}$

Propiedad: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es transformación lineal y B y B' son bases de \mathbb{V} ,

$$M_{B'}(f) = C_{BB'}M_B(f)C_{B'B}$$

o, en virtud de la propiedad anterior,

$$M_{B'}(f) = (C_{B'B})^{-1}M_B(f)C_{B'B}$$

5.2. Ejercicios

Ejercicio 5.1 Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales (t.l.):

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (0, x_1)$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - 5, x_1 + x_2)$
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2, x_1)$
- (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
- (e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_2 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$
- (f) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, f(A) = \det(A)$
- (g) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, con $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$
- (h) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, con $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$

Ejercicio 5.2 Interpretar geoméricamente las t.l. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- (a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- (b) $f(x_1, x_2) = (0, x_2)$
- (c) $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$
- (d) $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

Ejercicio 5.3 Decidir si existe una t.l. f que satisface las condiciones dadas; en caso afirmativo, si es única, encontrar la expresión de $f(\mathbf{x})$.

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(2, 1) = (1, 2), f(-1, 0) = (1, 1)$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(1, 3) = (0, 0, 1), f(3, 1) = (0, 0, 2)$
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(1, 2, 1) = (2, 0), f(-1, 0, 1) = (1, 3), f(0, 2, 2) = (3, 3)$
- (d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(0, 1, 1) = (1, 2, 3), f(-1, 2, 1) = (-1, 0, 1), f(-1, 3, 2) = (0, 2, 3)$
- (e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(1, 1, 1) = (1, 0, 0), f(1, 1, 0) = (2, 4, 0), f(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$

Ejercicio 5.4

- (a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$ y sean $\mathbf{v} = (2, 3), \mathbb{S} = \langle (1, 2, 1) \rangle, \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Describir $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbf{v})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.
- (b) Sea $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} & 0 \\ a_{31} & a_{12} \end{pmatrix}$$

y sean

$$\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$\mathbb{T} = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{11} - a_{12} = a_{21} = 0\}.$$

Describir $f(\mathbb{S})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 5.5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, 6x_1 - 2x_2).$$

- (a) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Nu } f$?
(5, 15) (3, 4) (1, 1) (0, 0)
- (b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\text{Im } f$?
(1, -2) (-6, 12) (5, 0) (0, 0)
- (c) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Im } f$.
- (d) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Nu } f$.

Ejercicio 5.6 Hallar bases de $\text{Nu } f$ y de $\text{Im } f$ en cada caso.

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$
- (b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$

- (c) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4)$
- (d) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $f \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.7 Decidir cuáles de las transformaciones lineales del ejercicio anterior son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 5.8 Sea $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la transformación lineal definida por $f(X) = AX$; en cada caso determinar si f es isomorfismo y si A es inversible.

- (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.9 En caso caso definir una t.l. que verifique:

- (a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu } f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu } f = \langle (1, 3) \rangle$, $\text{Im } f = \langle (0, 1) \rangle$
- (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 0, 3) \in \text{Nu } f$ y f es epimorfismo.
- (d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu } f = \text{Im } f = \langle (2, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$
- (e) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no nula, tal que $I \in \text{Nu } f$ y f no es epimorfismo.
- (f) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu } f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = x_3 ; x_1 + x_3 = x_4\}$
- (g) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu } f + \text{Im } g = \mathbb{R}^4$, donde $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ está dada por $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Ejercicio 5.10 Calcular $\dim \text{Nu } f$ y $\dim \text{Im } f$ en los siguientes casos:

- (a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ monomorfismo.
- (b) $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5$ epimorfismo.
- (c) $f: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
- (d) $f: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ $f(X) = 0$.
- (e) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\langle (1, 2, 3, 4), (-1, 2, 1, 0) \rangle \subset \text{Nu } f$ y $(1, 0, -1, 0) \in \text{Im } f$.

Ejercicio 5.11 Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2)$, $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Calcular $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Ejercicio 5.12 Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales tales que: $f(1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$, $f(1, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2)$

- (a) Calcular $h = g \circ f$ y $t = f \circ g$.
- (b) Determinar núcleo e imagen de f , g , h y t .

Ejercicio 5.13 Calcular las inversas de los siguientes isomorfismos:

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - 5x_2)$
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$
- (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
- (d) $f: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ $f(A) = A^t$
- (e) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4$ $f(a_{ij}) = (a_{11} - a_{12}, a_{11} + a_{12}, a_{22}, a_{21})$

Ejercicio 5.14 Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_3; x_1 + x_2 = x_4\}$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 = x_3 + x_4\}$. Definir una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que se verifique simultáneamente: $\text{Nu } f = \mathbb{S}$ y $\text{Nu } f \circ f = \mathbb{T}$.

Ejercicio 5.15 Interpretar geoméricamente y decidir si es $f \circ f = f$.

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$
- (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$

Ejercicio 5.16

- (a) Definir un proyector $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu } p = \langle (-1, 1) \rangle$ e $\text{Im } p = \langle (1, 1) \rangle$. Interpretar geoméricamente.
- (b) Definir un proyector $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu } p = \langle (1, -2) \rangle$. ¿Es único? Interpretar geoméricamente.

Ejercicio 5.17 Escribir la matriz de cada una de las siguientes t.l. e indicar a qué espacio de matrices pertenece.

- (a) $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_2)$
- (b) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 5x_3, x_2 + x_3)$
- (c) $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

Ejercicio 5.18 Si la matriz de $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

- (a) Calcular $f(1, 2, 0)$, $f(0, 0, 0)$, $(5, 7, 2)$.
- (b) Hallar bases de $\text{Nu } f$ e $\text{Im } f$.

Ejercicio 5.19 Escribir la matriz $M(f)$ en cada caso:

- (a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. tal que $f(1, 0, 0) = (2, -1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1, 3, 0)$, $f(0, 0, 1) = (0, -4, -2, 6)$
- (b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $f(2, 0, 0) = (4, 2, 2)$, $f(0, 3, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 0, 3) = (0, -1, 0)$

Ejercicio 5.20 En cada caso hallar $M_{BB'}(f)$

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, $B = E$, base canónica de \mathbb{R}^2 ; $B' = E'$, base canónica de \mathbb{R}^3
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2)$,
 $B = \{(-1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$
- (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$,
 $B = \{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(2, 1), (1, -1)\}$
- (d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, 2x_4, x_2 + x_3)$,
 $B = \{(1, -1, 2, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, -1)\}$, $B' = E$

Ejercicio 5.21 Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases de \mathbb{R}^2 , y sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar $M_{B''B'}(f)$ donde $B'' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$.

Ejercicio 5.22 Sea $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la t.l. definida por $f(X) = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $M(f)$.

Ejercicio 5.23 Sean S_1 y S_2 subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim S_1 = 1$, $\dim S_2 = 2$ y $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$. Demostrar que si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una t.l. tal que $f(S_1) = S_1$ y $f(S_2) = S_2$ y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 tal que $\{\mathbf{v}_1\}$ es base de S_1 y $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base de S_2 , entonces

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \text{ con } a \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ejercicio 5.24 Sean $B = \{(0, 0, 2), (0, 1, -1), (2, 1, 0)\}$, $B' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular $f(0, 2, -1)$.
- (b) Hallar una base de $\text{Im } f$ y una base de $\text{Nu } f$.

Ejercicio 5.25 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, con

$B = \{(-1, 0), (1, -1)\}$ y $B' = \{(2, 1, 0), (1, 0, -1), (0, -2, 3)\}$. Definir $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu } g = \text{Im } f$ y hallar $M_{B'B}(g)$.

Ejercicio 5.26 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que cumple $f^2 = f$, f no es idénticamente nula y f es distinta de la identidad; probar que existe una base B de \mathbb{R}^2 tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.27 Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que en las bases $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ tiene matriz

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular: $f(0)$, $f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3)$, $f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)$
- (b) Dar bases de $\text{Nu } f$ e $\text{Im } f$.
- (c) Calcular $f^{-1}(\mathbf{w}_1)$.

Ejercicio 5.28 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 , y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar si f es isomorfismo.

Ejercicio 5.29 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 , y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ base de \mathbb{R}^4 . Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hallar base de $\text{Nu } f$ y de $\text{Im } f$.

Ejercicio 5.30 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 , y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $2a^2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3a\mathbf{v}_3 \in \text{Im } f$.

Ejercicio 5.31 Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 . Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$, con $\mathbf{z}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

- (a) Probar que C es base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Hallar $M_{CB'}(f)$.

Ejercicio 5.32 Sean las transformaciones lineales

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2);$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ tal que } M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar $M(g \circ h)$, $M(h \circ g)$ y $M(h \circ f)$.

(b) Hallar $M_{BB'}(h \circ f)$, $M_{B'B}(f \circ g)$ y $M_B(g \circ h)$ con $B = \{(1, -1), (1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (-1, 0, 0)\}$.

Ejercicio 5.33 Sea $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una base B_1 para $\text{Nu } f$ y encontrar un conjunto B_2 de vectores de \mathbb{R}^5 tal que $B = B_1 \cup B_2$ es una base de \mathbb{R}^5 .

(b) Probar que los transformados de los vectores de B_2 por f , son linealmente independientes y extender este conjunto a una base B de \mathbb{R}^4 .

(c) Calcular $M_{BB'}(f)$.

Ejercicio 5.34 Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 , y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $(f \circ f)(3\mathbf{v}_1)$ y $(f \circ f)(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2)$

(b) Hallar $\dim \text{Nu}(f \circ f)$ y $\dim \text{Im}(f \circ f)$.

Ejercicio 5.35 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$. Sin calcular f^{-1} , hallar:

(a) $M(f^{-1})$.

(b) $M_{B'B}(f^{-1})$ con $B = \{(1, 1), (2, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 2), (0, 1)\}$.

Ejercicio 5.36 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 0)\}$.

(a) Hallar $M_{BE}(f)$ y $M_B(f)$. (b) Hallar $M_{BE}(f^{-1})$.

Ejercicio 5.37 Sea $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$ bases de \mathbb{V} . Hallar $M_{B'B}(f)$, $M_{BB'}(f)$, $M_{B'}(f)$.

Ejercicio 5.38 Sean $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $g: \mathbb{V} \rightarrow$

\mathbb{V} tal que $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de \mathbb{V} .

(a) Hallar $M_{BB'}(g \circ f)$ y $M_{B'B}(g \circ f)$.

(b) Hallar $M_{BB'}(g^{-1})$.

5.3. Ejercicios surtidos

Ejercicio 5.1 Sean en $\mathbb{R}^4: \mathbb{S}_1 = \langle (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3) \rangle$ y $\mathbb{S}_2 = \langle (1, 2, 0, 1), (-1, 1, 4, 2) \rangle$. Definir, si es posible, una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\text{Nu } f = \mathbb{S}_1, \quad \text{Im } f = \mathbb{S}_2 \quad \text{y} \quad f \circ f = f$$

Ejercicio 5.2 Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Hallar una t.l. $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, no nula, que satisfaga simultáneamente:

$$f \circ g = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ y } g \circ f = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}. \quad (\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ y } \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \text{ son las t.l. nulas de } \mathbb{R}^3 \text{ y } \mathbb{R}^4)$$

Ejercicio 5.3 Sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, -x_1 + x_3, x_1)$.

(a) Definir, si es posible, una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f \neq 0, \quad f \circ g = 0 \text{ y } \text{Nu } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$$

(b) Expresar $(1, 1, -2, 3) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{v} \in \text{Nu } f$ y $\mathbf{w} \in \text{Im } f$.

Ejercicio 5.4 Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$. Determinar un t.l. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\mathbb{S} \subset \text{Nu } f \cap \text{Im } f \text{ y } f(1, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 0).$$

Ejercicio 5.5 Hallar un proyector $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$\text{Nu } p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 + x_4 = x_1 - x_3 = 0\}$$

y la recta \mathbb{L} de la ecuación $X = \lambda(1, 0, -1, 0) + (0, 0, 0, 1)$ está contenida en $\text{Im } p$.

Ejercicio 5.6 Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ las t.l. definidas por

$$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2, x_1, x_1)$$

$$g(x_1, x_2) = (0, 0, x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

- Probar que $\text{Im } f \oplus \text{Im } g = \mathbb{R}^4$.
- Determinar, si es posible, un transformación lineal $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que se verifique simultáneamente: $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, y $h \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$

Ejercicio 5.7 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y sea $P = (2\sqrt{2}, 7, \sqrt{2})$. Calcular la distancia de P a la imagen de f .

Ejercicio 5.8 Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión 3 y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de \mathbb{V} . Sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una t.l. tal que:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 ; f(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 ; f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3$$

Determinar todos los valores de a para los cuales f no es monomorfismo. Para cada uno de ellos calcular el núcleo de f .

Ejercicio 5.9 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de k para los cuales f es un monomorfismo.

Ejercicio 5.10 Sea $B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Probar que $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
- Probar que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \text{Nu } f$.

Ejercicio 5.11 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ con $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, -1)\}$ y $B' = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Si $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$, hallar un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^3 tal que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{T} \oplus f(\mathbb{S})$

Ejercicio 5.12 Sean $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases \mathbb{V} .

- Hallar $M_B(f)$.
- Demostrar que $\text{Im } f = \langle 5\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 \rangle$.

Ejercicio 5.13 Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una t.l. que satisface: $f \circ f = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$; $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 2, -1)$; $f(0, 1, 0, 0) = (0, -1, 1, 0)$. Calcular $M(f)$.

Ejercicio 5.14 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una t.l. tal que $f \circ f \circ f \equiv 0$ y $f \circ f \neq 0$. Probar que existe una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.15 Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.l. y sean B y B' bases de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, tales que $M_{BB'}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Probar que f es isomorfismo.
- Hallar $M_{BB'}(g)$.

Ejercicio 5.16 Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{V} y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base de \mathbb{W} . Sean $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ t.l. tales que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcular $g \circ f(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3)$.
- Hallar una base de $\text{Nu}(g \circ f)$.

Ejercicio 5.17 Sean $\mathbb{S}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; x_1 - 3x_3 + x_4 = 0\}$; $\mathbb{S}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$; $\mathbb{T}_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$; $\mathbb{T}_2 = \langle (2, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$. Hallar una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente: $f(\mathbb{S}_1) \subseteq \mathbb{T}_1$; $f(\mathbb{S}_2) \subseteq \mathbb{T}_2$; $\dim \text{Nu } f = 1$. Justificar.

Ejercicio 5.18 Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_4, -x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_3 + x_4, x_2 - x_4)$$

Definir una t.l. $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Im } g = \text{Nu } f$ y $\text{Nu } g = \text{Im } f$.

Ejercicio 5.19 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una t.l. tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix}$.

Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica simultáneamente: $\text{Nu } f \neq \{0\}$ y $\text{Nu } f \subseteq \text{Im } f$.

Ejercicio 5.20 Sean $\mathbb{S}: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ y $\mathbb{H}: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$. Hallar una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique: $f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$; $\text{Im } f = \mathbb{H}$; $\text{Nu}(f \circ f) = \mathbb{S}$.

Ejercicio 5.21 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ con $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Hallar todos los valores de a para los cuales $f(1, 2, 1) = (0, 1, -6)$.

Ejercicio 5.22 Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique: $\text{Im } f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$; $\text{Nu } f = \langle (1, 0, 1, 0) \rangle$; $f^3 = f$; $f(1, 0, 0, 1) \neq (1, 0, 0, 1)$.

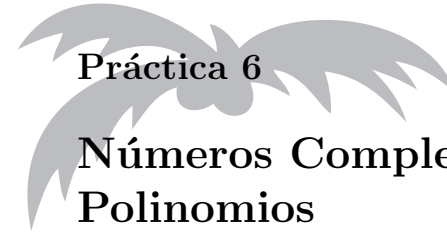
Ejercicio 5.23 Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que: $\text{Nu } f = \text{Im } f$ y $f(3, 2, 1, -1) = f(-1, 2, 0, 1) \neq 0$.

Ejercicio 5.24 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Hallar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.25 Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

- I. $\text{Nu } f \cap \text{Im } f = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$
- II. $(1, 5, 1, 0) \in \text{Im } f$
- III. $(3, 1, 2, 2) \notin \text{Im } f + \text{Nu } f$



Práctica 6

Números Complejos y Polinomios

6.1. Definiciones y propiedades

Parte 1: Números complejos

El conjunto \mathbb{C} de los *números complejos* es:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi / a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $a + bi$ se llama *forma binómica* de z .

- La *parte real* de z es a : $\text{Re } z = a$.
- La *parte imaginaria* de z es b : $\text{Im } z = b$.

Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z = w \Leftrightarrow \text{Re } z = \text{Re } w \text{ e } \text{Im } z = \text{Im } w$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos, entonces:

- Su suma es: $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- Su producto es: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Notación:

$$a + (-b)i = a - bi \quad a + 0i = a \quad 0 + bi = bi$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamaremos *conjugado* de z a $\bar{z} = a - bi$; y llamaremos *módulo* de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observaciones:

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Propiedades: (conjugado)

- $\overline{\overline{z}} = z$
- Si $z \neq 0, z^{-1} = (\overline{z})^{-1}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z - \overline{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$

Propiedades: (módulo)

- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- $|z| = | - z|$
- $|zw| = |z||w|$
- Si $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$
- Si $w \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

Si $z \in \mathbb{C}, z = a + bi, z \neq 0$, llamaremos *argumento* de z al único número real $\arg z$ que verifica simultáneamente:

$$0 \leq \arg z < 2\pi; \quad \cos \arg z = \frac{a}{|z|}; \quad \sin \arg z = \frac{b}{|z|}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ se llama *forma trigonométrica* de z .

Si $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ y $w = \tau(\cos \beta + i \sin \beta)$, con $\rho, \tau > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$z = w \Leftrightarrow \rho = \tau \text{ (es decir } |z| = |w|) \text{ y } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Teorema de De Moivre: Sean $z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0, w \neq 0$. Si $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$ entonces:

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

Corolario:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= |z|^{-1}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) \\ \overline{z} &= |z| \cdot (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)) \\ z^n &= |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, una *raíz n -ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$.

Propiedad: Si z es una *raíz n -ésima* de w entonces:

$$z = |w|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right)$$

para algún entero k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

Si $z \in \mathbb{C}, z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, la *notación exponencial* de z es

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

Propiedades: Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $e^{i\alpha} = e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$
- $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

Parte 2: Polinomios

En lo que sigue \mathbb{K} significa \mathbb{Q}, \mathbb{R} ó \mathbb{C}

Un *polinomio* con coeficientes en \mathbb{K} es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j \text{ con } n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } a_j \in \mathbb{K}.$$

Indicamos $\mathbb{K}[X] = \{P / P \text{ es polinomio con coeficientes en } \mathbb{K}\}$, y consideramos en $\mathbb{K}[X]$ las operaciones de suma y producto usuales.

Definición: Si $P \neq 0, P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ y $a_n \neq 0$, definimos

$$\text{grado de } P = \operatorname{gr} P = n$$

Observación: El Polinomio nulo no tiene grado.

Propiedades: si $P \neq 0, Q \neq 0$,

- $\operatorname{gr}(PQ) = \operatorname{gr} P + \operatorname{gr} Q$
- $\operatorname{gr}(P + Q) \leq \max\{\operatorname{gr} P, \operatorname{gr} Q\}$ (si $P + Q \neq 0$).

Dados $P \in \mathbb{K}[X], z \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$ llamaremos *especialización* de P en z al número

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_jz^j$$

Sea $P \in \mathbb{K}[X], z \in \mathbb{K}$. Diremos que z es *raíz* de P si $P(z) = 0$.

Algoritmo de la división: Dados $P, Q \in \mathbb{K}[X], Q \neq 0$, existen únicos $S, R \in \mathbb{K}[X]$ tales que: $P = QS + R$ con $R = 0$ ó $\operatorname{gr} R < \operatorname{gr} Q$.

Se dice que Q *divide* a P (o que P es divisible por Q) y se nota $Q|P$, si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo, esto es, si $P = QS$ con $S \in \mathbb{K}[X]$.

Algunos resultados importantes

Teorema del Resto: Si $P \in \mathbb{K}[X]$ y $z \in \mathbb{K}$, el resto de la división de P por $(x - z)$ es igual a $P(z)$.

Corolario: Sea $P \in \mathbb{K}[X]$ y $z \in \mathbb{K}$; z es raíz de P si y sólo si $(x - z)|P$

Teorema: Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ son raíces de P con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, entonces $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_r)Q(x)$ con $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Corolario: Si P es un polinomio de grado n entonces P tiene a lo sumo n raíces.

Teorema de Gauss: Sea $P \in \mathbb{Z}[X], P(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q}$ (con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y $(p, q) = 1$) es una raíz de P , entonces $p|a_0$ y $q|a_n$.

Teorema fundamental del álgebra: Si $P \in \mathbb{C}[X]$ y $\text{gr } P \geq 1$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P .

Teorema: Sea $P \in \mathbb{R}[X]$, y sea $z \in \mathbb{C}$. Si z es raíz de $P \Rightarrow \bar{z}$ es raíz de P .

Si $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \in \mathbb{K}[X]$, llamaremos *polinomio derivado* de P a:

$$\partial P(x) = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$$

Propiedades:

- $\partial(P+Q) = \partial P + \partial Q$
- $\partial(PQ) = (\partial P)Q + P\partial Q$
- $\partial(kx^0) = 0$

Notación: Designamos $\partial^{(m)}P = \partial(\partial^{(m-1)}P) = \underbrace{\partial(\partial(\dots(\partial P)\dots))}_{m \text{ veces}}$

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, diremos que $z \in \mathbb{C}$ es *raíz de multiplicidad k* de P ($k \in \mathbb{N}$) si $P(x) = (x-z)^k Q(x)$ con $Q \in \mathbb{C}[X]$ y $Q(z) \neq 0$.

Teorema: Sea $P \in \mathbb{R}[X]$, y sea $z \in \mathbb{C}$; z es raíz de multiplicidad k de P si y sólo si $P(z) = \partial P(z) = \partial^2 P(z) = \dots = \partial^{(k-1)} P(z) = 0$ y $\partial^{(k)} P(z) \neq 0$

Polinomio interpolador de Lagrange

Sean a_0, a_1, \dots, a_n , $a_i \in \mathbb{K}$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, y sean b_0, b_1, \dots, b_n arbitrarios, $b_i \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio $L \in \mathbb{K}[X]$, con $L = 0$ ó $\text{gr } L \leq n$, que satisface $L(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Se trata del polinomio:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(x) \quad \text{donde} \quad L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$$

6.2. Ejercicios

Parte 1: Números complejos

Ejercicio 6.1 Dar la forma binómica de cada uno de los complejos:

- (a) $z = (3-i) + (\frac{1}{5} + 5i)$ (b) $z = (\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}-i)$
 (c) $z = (3 + \frac{1}{3}i)(3 - \frac{1}{3}i) + (3+2i)$

Ejercicio 6.2 Dar la forma binómica del complejo z en cada caso:

- (a) $z = (1+2i)(1-2i)^{-1}$ (c) $z = (1+i)^{-1} + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + (-2+5i)$
 (b) $z = (1+i)(2+3i)(3+2i)$

Ejercicio 6.3 Calcular $|z|$ en los siguientes casos:

- (a) $z = (\sqrt{2}+i) + (3\sqrt{2}-3i)$ (e) $z = ||1+i| + i| + i$
 (b) $z = (1+ai)(1-ai)^{-1}$ [$a \in \mathbb{R}$] (f) $z = (1+i)(1-2i)(3-i)$
 (c) $z = (3i)^{-1}$ (g) $z = 3(1+3i)^{10}$
 (d) $z = |1-i| + i$

Ejercicio 6.4 Dar la forma binómica de \bar{z} :

- (a) $z = |1-i| + i$ (d) $z = (1+3i)(1-3i)$
 (b) $z = ||1+i| + i| + i$
 (c) $z = (1-2i)(2-i)$ (e) $z = (2+5i) + (3-2i) + (1-3i)$

Ejercicio 6.5 Representar en el plano todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

- (a) $|z| = 3$ (b) $|z| \leq 2$ (c) $z = \bar{z}$

Ejercicio 6.6

- (a) Si $z_0 = -1+i$, representar en el plano $B = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq 2\}$
 (b) Si $z_0 = -1, w_0 = 3+i$, representar en el plano $B = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq |z - w_0|\}$
 (c) Si $A = \{z \in \mathbb{C} / \text{Re } z \leq 1, \text{Im } z \leq \frac{1}{2}\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} / |z - (1+3i)| = 5\}$, representar gráficamente $C = A \cap B$.

Ejercicio 6.7 Escribir en forma binómica todos los complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

- (a) $z^2 = 1 - 4\sqrt{3}i$ (c) $z^2 = 5 - 2iz$
 (b) $z^2 = 16 + 14\sqrt{3}i$ (d) $z^2 + 2z + 3 = 0$

Ejercicio 6.8 Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que su conjugado coincide con su cuadrado.

Ejercicio 6.9

- (a) Escribir los siguientes complejos en forma binómica:

- I. $z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$ III. $z = (\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$
 II. $z = 3(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$ IV. $z = 2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$

- (b) Escribir los siguientes en forma trigonométrica:

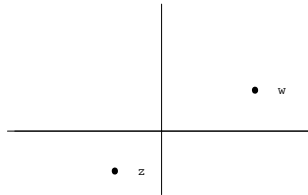
- I. $z = 5$ V. $z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$
 II. $z = -\sqrt{7}$ VI. $z = 3 - \sqrt{3}i$
 III. $z = 15i$ VII. $z = -3(\cos 0 + i \sin 0)$
 IV. $z = -\frac{1}{3}i$ VIII. $z = 3(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2})$

Ejercicio 6.10 Representar en el plano complejo:

- (a) $A = \{z \in \mathbb{C} / \arg z = 0\}$
 (b) $B = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{5}{4}\pi\}$
 ¿Cuáles de los números complejos del Ejercicio 9 pertenecen a B?
 (c) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 5 \text{ y } 0 \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi\}$

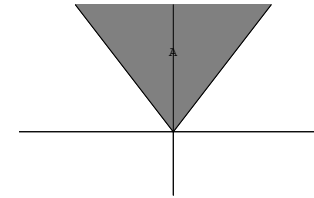
Ejercicio 6.11

- (a) En el gráfico dado ubicar los números complejos:



- I. iz III. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$
 II. iw IV. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)w$

- (b) Graficar $iA = \{z \in \mathbb{C} / z = iw, \text{ con } w \in A\}$



Ejercicio 6.12

- (a) Escribir la forma trigonométrica $z = (1 + i)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$.
 (b) Escribir la forma binómica $z = (-3\sqrt{3} + 3i)^{15}$

Ejercicio 6.13 Encontrar todas las raíces n-ésimas de w para:

- (a) $n = 3$; $w = 1$ (c) $n = 4$; $w = -1 - \sqrt{3}i$
 (b) $n = 5$; $w = -3$

Ejercicio 6.14 Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

Ejercicio 6.15

- (a) Hallar todas las raíces sextas de $(1 + i)$.
 (b) ¿Existe una raíz sexta de $(1 + i)$ cuyo conjugado sea también raíz sexta de $(1 + i)$?
 (c) Hallar el producto de todas las raíces sextas de $1 + i$.

Ejercicio 6.16 Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

- (a) $z^3 = i\bar{z}^2$ (d) $z^4 + z^{-4} = 0$
 (b) $z^{10} = -4\bar{z}^{10}$ (e) $z^3 + 9i\bar{z}^2|z| = 0$
 (c) $z^5 - \bar{z} = 0$ (f) $z^4 = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$

Ejercicio 6.17

- (a) Calcular $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{5}{6}\pi}$.
 (b) Expresar en forma exponencial la raíces quintas de (-1) .
 (c) Probar que $\forall t \in \mathbb{R}$ vale

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \text{ sen } t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Parte 2: Polinomios

Ejercicio 6.18 Efectuar PQ , $3P + Q$ y $P^2 - Q$; indicar el grado de cada polinomio hallado para:

- (a) $P(X) = 2x + 1$, $Q(x) = x^2 + 3x - 2$
- (b) $P(X) = 3x^2 + x - 1$, $Q(x) = -9x^2 - 3x + 6$
- (c) $P(X) = x^3 - 3$, $Q(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$

Ejercicio 6.19 Encontrar, si existen, a , b y c en \mathbb{R} tales que:

- (a) $3x - 2 = a(x^2 + x + 3) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x^2 - 3)$
- (b) $(2x - 1)(x + 1) = ax^2 + b(x + 1)(x + 3)$

Ejercicio 6.20

- (a) Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que:
 - i. Si $P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2$, sea $P(2) = 3$.
 - ii. Si $P(x) = x^3 + 3x^2 + a$, P tenga a cero como raíz.
 - iii. Si $P(x) = ax^2 + ax + 3$, sea $P(-1) = 3$ y gr $P = 2$.
- (b) Determinar en cada caso a , b y c en \mathbb{R} para que:
 - i. $P(x) = ax^2 + bx + c$ tenga a 1 y -1 por raíces.
 - ii. $P(x) = x^2 + 2bx + a$ y $Q(x) = ax^3 - b$ tengan a 2 como raíz común.

Ejercicio 6.21

- (a) Sabiendo que $P(3) = 1$ y $P(-2) = 3$, hallar el resto de la división de P por $(x - 3)(x + 2)$.
- (b) Calcular el resto de la división de $P(x) = x^n - 2x^{n-1} + 2$ por $x^2 + x$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (c) Los restos de dividir a $P(x)$ por $(x + 2)$, $(x - 3)$ y $(x + 1)$ son 3, 7 y 13 respectivamente. Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$
- (d) Calcular el resto de la división de $P(x) = (\cos a + x \sin a)^n$ por $x^2 + 1$.

Ejercicio 6.22 Determinar las raíces de los siguientes polinomios:

- (a) $P(x) = x^2 + ix + 1$
- (c) $P(x) = x^2 + 2x + i$
- (b) $P(x) = x^2 + (1 - i)x + 1$
- (d) $P(x) = ix^5 - 1$

Ejercicio 6.23 Hallar todas las raíces de los siguientes polinomios:

- (a) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$
- (b) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x - 7$
- (c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

- (d) $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$, sabiendo que i es raíz.
- (e) $P(x) = x^5 - 25x^3 + 85x^2 - 106x + 45$, sabiendo que $(2 + i)$ es raíz.
- (f) $P(x) = x^4 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$
- (g) $P(x) = x^6 - 2x^4 - 51x^2 - 108$, sabiendo que $P(-\sqrt{3}i) = 0$.

Ejercicio 6.24 Dado $P(x) = x^3 - 2$ encontrar

- (a) Todas sus raíces racionales.
- (c) Todas sus raíces complejas.
- (b) Todas sus raíces reales.

Ejercicio 6.25 Dado $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$, determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P y hallar las restantes raíces de P .

Ejercicio 6.26 Escribir $x^4 + 1$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Ejercicio 6.27 Determinar la multiplicidad de α como raíz de P .

- (a) $P(x) = (x^2 - 1)(x - 1)^3(x^5 - 1)$; $\alpha = 1$
- (b) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 12x^2$; $\alpha = 0$
- (c) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$; $\alpha = 2$
- (d) $P(x) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^3 + i)$; $\alpha = i$

Ejercicio 6.28 Hallar todas las raíces del polinomio P y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

- (a) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 24x + 16$, y se sabe que P tiene una raíz triple.
- (b) $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$, y se sabe que P tiene una raíz doble.

Ejercicio 6.29

- (a) Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que tenga a $1/2$ como raíz simple, a $(1 + i)$ como raíz doble y que verifique que $P(0) = -2$.
- (b) Hallar todos los polinomios P con coeficientes reales, de grado 3, que tengan a (-2) como raíz doble y que verifiquen $P(1) = P(-1)$.

Ejercicio 6.30 Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Hallar el resto de la división de P por Q sabiendo que: $P(0) = -1$; $P(1) = 3$; $\partial P(1) = -3$.

Ejercicio 6.31 Sabiendo que $Q(x) = 81x^4 - 1$ y $P(x) = 9x^4 + 27x^3 - 8x^2 + 3x - 1$ tienen alguna raíz común, encontrar todas las raíces de P .

Ejercicio 6.32 Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$, y sean a, b y c sus raíces. Calcular: $a + b + c$, abc , $a^2 + b^2 + c^2$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Ejercicio 6.33

- Calcular la suma de las raíces séptimas de la unidad.
- Calcular el producto de las raíces séptimas de la unidad.

Ejercicio 6.34

- Sea $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Encontrar α para que la suma de dos de las raíces de P sea igual a -1 .
- Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + \alpha$. Encontrar α de manera que una de las raíces de P sea igual a la opuesta de otra.
- Sea $P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + \alpha$. Encontrar α de manera que las raíces y, z, w de P verifiquen $y = z + w$.

Ejercicio 6.35

- Encontrar un polinomio P , de grado a lo sumo 3, que satisfaga $P(1) = 1$; $P(0) = -1$; $P(2) = 2$; $P(-1) = 0$
- Encontrar la ecuación de una parábola que pase por P_1, P_2 y P_3 , donde $P_1 = (-1, 1)$; $P_2 = (0, 1)$; $P_3 = (2, -2)$
- Encontrar un polinomio de grado 4 que satisfaga: $P(-1) = -1$; $P(0) = 1$; $P(1) = 4$

6.3. Ejercicios Surtidos

Ejercicio 6.1 Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

- $z^3 = 3iz\bar{z}$
- $(1 + \sqrt{3}i)z^3 = 2\bar{z}$

Ejercicio 6.2 Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, tal que $|z| = 1$. Verificar que $\text{Im}(i\frac{1+z}{1-z}) = 0$.

Ejercicio 6.3 Sea $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 1$, tal que $w^3 = 1$.

- Probar que $1, w$ y w^2 son las raíces cúbicas de 1.
- Probar que $(1 + w^2)^2 = w^2$.
- Calcular $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5)$.

Ejercicio 6.4 Calcular z^{20} para todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(iz)^3 = z$.

Ejercicio 6.5 Sean $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 1$ y $Q(x) = x^3 + ax + 1$. Determinar el valor de a sabiendo que el resto de dividir P por Q es $R(x) = 2x - 1$.

Ejercicio 6.6 Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que verifique $P(1 + i) = 0$; -1 es raíz doble de P ; $\text{Im}(P(i)) = 28$.

Ejercicio 6.7 Sea $P(x) = (x^3 - ax^2 - a^2x + 1)(x^2 - a^2)$. Hallar a para que -1 sea raíz doble de P .

Ejercicio 6.8 Sean $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 8x - 8$ y $Q(x) = x^3 - 1$. Se sabe que P y Q tienen al menos una raíz común. Hallar todas las raíces de P en \mathbb{C} .

Ejercicio 6.9 Sea $A = \{z \in \mathbb{C} / z \text{ es raíz cúbica de } -27 \text{ y } z \notin \mathbb{R}\}$ Hallar todos los $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado 5, que verifique simultáneamente:

- sus únicas raíces son -2 y los elementos de A .
- todas sus raíces reales son simples.

¿Cuál de los polinomios encontrados cumple la condición $P(-1) = 9$?

Ejercicio 6.10 Encontrar todas las raíces de $P(x) = 9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1$, y escribir a P como producto de polinomios de grado 1.

Ejercicio 6.11 Hallar un polinomio P de grado mínimo, con coeficientes reales, que verifique simultáneamente:

- las soluciones de $z^2 = 5\bar{z}$ son raíces de P .
- P tiene alguna raíz doble.
- $P(1) = 31$

Ejercicio 6.12 Encontrar todas las raíces de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 12x - 8$, sabiendo que tiene alguna raíz imaginaria pura.

Ejercicio 6.13 Si $P(x) = (1 - x)(1 - \alpha x)(1 - \alpha^2 x)(1 - \alpha^3 x)(1 - \alpha^4 x)$ y $\alpha^5 = 1$, escribir a P en la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

Ejercicio 6.14 Sea $P(x) = x^3 + (1 - i)x^2 + (2 + i)x + \sqrt{2}i$ y z_1, z_2, z_3 sus raíces complejas. Encontrar un polinomio cuyas únicas raíces sean: $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, i$ y $-i$.

Ejercicio 6.15 Se sabe que $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2$ tiene dos raíces que son una inversa de la otra. Escribir a P como producto de dos polinomios con coeficientes reales y de grado positivo.

Práctica 7

Autovalores y Autovectores

7.1. Definiciones y propiedades

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector* de A (o vector propio), si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. El número λ se llama *autovalor* de A (o valor propio).

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, diremos que \mathbf{v} es un *autovector* de A asociado al autovalor λ .

Sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una transformación lineal. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector* de f asociado al autovalor λ , si $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

El conjunto $S_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ es el *subespacio asociado al autovalor* λ .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si \mathbf{v} es un autovector de f asociado al autovalor λ , y $A = M(f)$, entonces \mathbf{v} es un autovector de A asociado al mismo autovalor λ , pues

$$A\mathbf{v} = f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

Propiedad: λ es autovalor de A si y sólo si la matriz $A - \lambda I$ no es inversible, o sea, si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

El polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se llama *polinomio característico* de A , y su grado es n .

Propiedad: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ son autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ respectivamente, y $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.

La transformación lineal $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ se dice *diagonalizable* si existe una base B de \mathbb{V} tal que $M_B(f)$ es diagonal.

Propiedad: Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es una transformación lineal y B es una base de \mathbb{V} formada por autovectores de f , entonces $M_B(f)$ es diagonal.

Propiedad: Si $\dim \mathbb{V} = n$ y f tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

Propiedad: Si B y B' son dos bases de \mathbb{V} , y $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es una transformación lineal, entonces las matrices $M_B(f)$ y $M_{B'}(f)$ tienen los mismos autovalores.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *diagonalizable* si existe una matriz $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tales que:

$$A = CDC^{-1}.$$

Propiedad: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

En este caso C es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde λ_i es el autovalor asociado a \mathbf{v}_i .

7.2. Ejercicios

Ejercicio 7.1 Para cada matriz calcular todos los autovalores y para cada uno de ellos hallar el subespacio asociado.

- (a) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
(b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7.2

- (a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A tiene a 1 como autovalor.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (b) Para los valores de k hallados, calcular todos los autovalores de A .

Ejercicio 7.3

- (a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 para la cual sea $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. definida por $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar una

base B de \mathbb{R}^3 para la cual sea $M_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.4

Sean $B = \{(1, 1, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. definida por $M_B(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Encontrar una base B' de \mathbb{R}^3 tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.5

Sea $B = \{(1, -1, 0); (0, 0, 1); (-3, 2, 1)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar una base B' tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.6

Determinar si la matriz A es diagonalizable; en caso afirmativo encontrar matrices C y D tales que $A = CDC^{-1}$ y D es diagonal.

- (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$
- (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7.7

- (a) Dada $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{14} .
- (b) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{10} .

Ejercicio 7.8

Sea $P(\lambda)$ el polinomio característico de A . Calcular $P(A)$.

- (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7.9

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ verifica $M_E(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, hallar todos los valores reales de a para los cuales $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$, siendo $\mathbb{S} = \langle (a + 3, a^2 - 4, 1) \rangle$.

Ejercicio 7.10

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 4x_2 + 4x_3, 5x_1 + 7x_2 + 10x_3, -6x_1 - 7x_2 - 10x_3)$$

Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

7.3. Ejercicios surtidos**Ejercicio 7.11**

Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ k & 3 & -1 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor igual a -2 . Decidir si la matriz A es diagonalizable.

Ejercicio 7.21

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Hallar una base B de \mathbb{R}^3 , $B = \{(-1, 1, 0), \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.31

Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base del espacio vectorial \mathbb{V} y $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la t.l. definida por: $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$. Hallar una base de autovectores de f .

Ejercicio 7.41

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar los autovalores y autovectores de f . ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 7.51

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_3, -7x_1 - 3x_2 + x_3, \alpha x_1 + 4x_3)$. Determinar α sabiendo que f no es isomorfismo, y decidir si existe una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.6 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3, -x_3)$. Hallar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f^{-1})$ sea diagonal.

Ejercicio 7.7 Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0) \rangle$. Hallar una t.l. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que sus autovalores sean 3, -2 y 0; $\text{Im } f = \mathbb{T}$ y $\text{Nu } f \subset \mathbb{S}$.

Ejercicio 7.8 Sean $B = \{(0, 1, 1), (1/2, -1/2, 0), (0, 0, -1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{EB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una base B' tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.9 Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\}$ bases de \mathbb{R}^3 y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar los autovalores de f y decidir si f es diagonalizable.

Ejercicio 7.10 Sean $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; $B' = \{(0, 0, -1), (-1, -1, -1), (3, 2, 1)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar los autovalores de $f \circ f$.

Ejercicio 7.11 Sea $B = \{(1, 0, -1), (0, 2, 1), (-1, 3, 2)\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar a y b para que $f(-1, -1, 0) = (-1, -1, 0)$. Para los valores hallados, ¿es f diagonalizable?

8

Programa

Álgebra C.B.C. para Ciencias Exactas e Ingeniería.

Unidad 1 Álgebra vectorial

Puntos en el espacio n-dimensional — Vectores — Producto escalar — Norma — Rectas y planos — Producto vectorial.

Unidad 2 Espacios vectoriales

Definición — Propiedades — Subespacios — Independencia lineal — Combinación lineal — Sistemas de generadores — Bases — Dimensión — Suma e intersección de subespacios — Suma directa — Espacios con producto interno.

Unidad 3 Matrices y determinantes

Espacios de matrices — Suma y producto de matrices — Ecuaciones lineales — Eliminación de Gauss-Jordan — Rango — Teorema de Roché-Frobenius — Determinantes — Propiedades — Determinante de un producto — Determinantes e inversas.

Unidad 4 Transformaciones lineales

Definición — Núcleo e imagen — Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos — Composición de transformaciones lineales — Transformaciones lineales inversas.

Unidad 5 Números complejos y polinomios

Números complejos — Operaciones — Forma binómica y trigonométrica — Teorema de De Moivre — Resolución de ecuaciones — Polinomios — Grado de un polinomio — Operaciones con polinomios — Raíces — Teorema del resto — Descomposición factorial — Teorema fundamental del álgebra — Fórmulas de interpolación de Lagrange.

Unidad 6) Transformaciones lineales y matrices
Matriz de una transformación lineal — Matriz de la composición — Matriz inversa — Cambios de bases.

Unidad 7) Autovalores y autovectores
Vectores y valores propios — Polinomio característico — Aplicaciones — Subespacios invariantes — Diagonalización.

Bibliografía

[1] Anton, H.: *Introducción al álgebra lineal*, Limusa.

[2] Lang, S.: *Álgebra lineal*, Fondo Educativo Interamericano.

[3] Grossman, S.: *Álgebra lineal*, Grupo Editorial Iberoamérica.

[4] Kurosch, A. G.: *Curso de álgebra superior*, Mir.

[5] Lipschutz, S.: *Álgebra lineal*, Serie Schaum - Mc Graw Hill.

[6] Gentile, E.: *Álgebra lineal*, Docencia.

[7] Kolman, B.: *Álgebra lineal*, Fondo Educativo Interamericano.

[8] Herstein, I. N. y Winter, D. J.: *Álgebra lineal y teoría de matrices*, Grupo Editorial Iberoamérica.